

**THE BOOK WAS
DRENCHED**

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_191094

UNIVERSAL
LIBRARY

سلسلة كتب مكلان المدرسية المصرية

المسائل المتوسطة

الجزء الثاني

مقرر السنة الثانية من التعليم الثانوى

تأليف

مُحَمَّدُ خَالِدُ الْحُسَيْنِ

مساعد المفتش بنظارة المعارف العمومية

« حقوق الطبع محفوظة »

١٩١٣ - ١٣٣١

مطبعة المعارف بشارع النخلة بمصر



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سائر الانبياء والمرسلين
(وبعد) فلما قررت نظارة المعارف العمومية اعادة تدريس علم
الهندسة المستوية وسائر العلوم الرياضية باللغة العربية طرق الرياضيون
أبواب التأليف وسارعوا الى التصنيف وكثرت الكتب الرياضية باللغة
العربية كما كثرت غيرها من الكتب الادبية

غير أن أكثر هذه المؤلفات لا يتفق وروح البرنامج الذى سنته
المعارف المصرية لمدارسها الثانوية لهذا أحبيت أن أضع كتاباً يكون
شاملاً لما تقررت دراسته على الطلاب فقامت بتأليف هذا المختصر
وجعلته على أحدث الطرق

ولما كان علم الهندسة المستوية يدرس فى الثلاث السنين الاولى
من التعليم الثانوى قسمت كتابى هذا الى ثلاثة اجزاء وجعلت كل

جزء منها خاصاً بما تقررت دراسته في كل سنة منها وقد اخترت ما وضعته
نظارة المعارف العمومية من الاصطلاحات العربية واكثرت من التمارين
وأضفت اليها بعضاً من المسائل المحلولة كي يستعين بها الطالب في حل
غيرها وتكون نموذجاً له عند كتابة حلول المسائل التي تلقى عليه واسأل
الله أن يجعله نافعاً أنه على ما يشاء قدير

محمد خالد حسنين

محتويات الكتاب

الصفحة

الباب

القسم الأول (في الدائرة)

- الأول — في التمهيدات والتعاريف الأولية . . . ٩
- الثاني — في الأقواس والزوايا والأوتار ١٢
- الزوايا المركزية المتساوية المرسومة في دائرة
- واحدة وأقواسها ١٢
- نصف القطر الذي ينصف وترأ في دائرة ١٥
- الدائرة التي تمر حول ثلاث نقط ليست على
- استقامة واحدة ١٨
- الاورار المتساوية المرسومة في دائرة واحدة
- وأقواسها ٢٠
- الاورار المتساوية المرسومة في دائرة واحدة
- وابعادها عن المركز ٢٢
- الاورار المختلفة المرسومة في دائرة واحدة
- وابعادها عن المركز ٢٤
- الثالث — في التماس ٣٤
- تماس الدائرة ونصف القطر المار بنقطة التماس ٣٥
- المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة ٣٧

الدائرتان المنتطعتان وخط مركزيهما . . ٣٩

الدائرتان المتماستان وخط مركزيهما . . . ٤١

الرابع - في الزوايا المركزية والمحيطية ٤٦

الزوايا المحيطية وعلاقتها بالزوايا المركزية

المشتركة معها في القوس المحصور بين ضلعيها ٤٧

الزاوية الحادثة من تقاطع وترين داخل دائرة ٤٩

الزاوية الحادثة من تقاطع وترين خارج دائرة ٥٠

الزوايا المحيطية المرسومة في قطعة واحدة من دائرة ٥١

الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة . . ٥٦

الزاوية التي رأسها على محيط الدائرة وأحد

ضلعيها وتر والثاني مماس ٦٠

الخامس - في العمليات ٦٤

القسم الثاني (في المساحات)

الأول - في مساحة الأشكال الرباعية والمثلث . . ٨٤

مساحة المستطيل ٨٤

مساحة متوازي الاضلاع ٨٥

مساحة المثلث ٨٧

مساحة شبه المنحرف ٩٢

الثاني - في الاستدلال الهندسى لبعض متطابقات جبرية ١٠٠

$$ل' (١' + ب' + ح' + ...)$$

$$= ل' ١' + ل' ب' + ل' ح' + ل' ... + ١٠٠$$

$$(١' + ب')^٢ = ١'^٢ + ب'^٢ + ٢ ١' ب' = ١٠٢$$

$$١٠٣ \quad (١' - ٢') + ٢' - ١' = ٢' - ١'$$

$$١٠٤ \quad (١' + ٢')(١' - ٢') = ٢'^2 - ١'^2$$

١٠٧ الثالث — في المربعات المنشأة على أضلاع المثلث

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية القائمة

١٠٧ في المثلث

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية

١١٥ المنفرجة في المثلث

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية

١١٦ الحادة في المثلث

١١٩ مجموع المربعين المنشأين على ضلعين من مثلث

الفرق بين المربعين المنشأين على ضلعين من مثلث

١٢٠ مجموع المربعات المنشأة على الأضلاع الأربعة

١٢١ لاى شكل رباعى

١٢٦ الرابع — في الدعاوى العملية

١٤١ الخامس — في المستطيل من حيث علاقته بالدائرة

المستطيل المكون من جزأى وتر منقسم في

١٤١ نقطة مفروضة عليه او على امتداده

١٤٣ الوتران المتقاطعان داخل دائرة

١٤٤ الوتران المتقاطعان خارج دائرة

المربع المنشأ على المماس المرسوم من نقطة

١٤٥ خارج دائرة

المسائل الهندسية

الجزء الثاني

ويحتوى على قسمين

القسم الاول (فى الدائرة)

الباب الأول

فى التمهيدات والتعاريف الأولية

١ - الدائرة هى شكل مستوي يحيط به خط جميع قطعه على ابعاد



(شكل ٩٦)

متساوية من نقطة داخلية تسمى مركزاً ففى
شكل (٩٦) النقطة م ابعادها عن جميع نقط
الخط الذى حولها متساوية ويسمى الخط
المحدد للدائرة بمحيطها

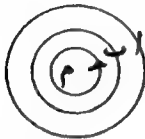
٢ - نصف قطر الدائرة هو الخط الذى يصل المركز باحدى

نقط المحيط مثل م

(ملاحظة) محيط الدائرة هو في الحقيقة المحل الهندسي لنقطة تسير وهي حافظة لبعد معين بينها وبين نقطة أخرى ثابتة وينتج من هذا التعريف أن البعد المعين هو نصف القطر وان انصاف الاقطار لدائرة واحدة متساوية

٣ - يقال أن الدائرتين متساويتان متى كان نصف قطر احدهما يساوى نصف قطر الأخرى

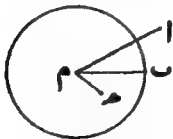
(ملاحظة) اذا طبقت احدى دائرتين متساويتين على الاخرى ووقع مركز الاولى على مركز الثانية انطبقت الدائرتان كل على الاخرى تمام الانطباق ووقعت جميع نقط محيط الدائرة الاولى على جميع نقط محيط الدائرة الثانية



(شكل ٩٧)

٤ - اذا اشتركت عدة دوائر في مركز واحد سميت متحدة المركز فمثلا الدوائر ب ج د هـ شكل (٩٧) تسمى متحدة المركز لان مركز كل منها هو م

٥ - تكون النقطة خارج الدائرة أو عليها أو داخلها على حسب ما يكون بعدها عن المركز اكبر من نصف القطر أو مساوياً له أو اصغر منه

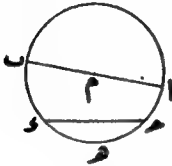


(شكل ٩٨)

ففي شكل (٩٨) نقطة ا خارج الدائرة لان م اكبر من نصف القطر ب نقطة ج على الدائرة لان م يساوى نصف القطر ب نقطة ح داخل الدائرة لان ح م اصغر من نصف القطر

٦ - قطر الدائرة هو مستقيم يمر بالمركز وينتهى طرفاه بالمحيط

مثل ا ب شكل (٩٩)



٧ - وتر الدائرة هو مستقيم يصل اى

نقطتين على المحيط مثل المستقيم ح د

شكل (٩٩)

٨ - قوس الدائرة هو جزء من محيطها

(شكل ٩٩)

مثل ح د ه و شكل (٩٩)

٩ - قطر الدائرة يقسم المحيط الى قوسين متساويين كل منهما

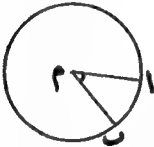
يساوى نصف المحيط ويسمى الشكل الذى يحده نصف المحيط

والقطر بنصف الدائرة

وتر الدائرة الذى لا يمر بمركزها يقسم المحيط الى قوسين غير

متساويين ويسمى اكبرهما القوس الاكبر

واصغرهما القوس الاصغر



١٠ - الزاوية المركزية هى ما كان

رأسها فى مركز الدائرة وضلعها نصفى قطرين

مثل ا ب شكل (١٠٠)

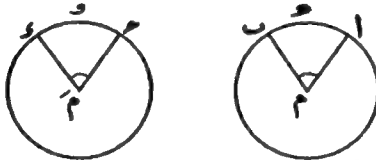
(شكل ١٠٠)

الباب الثانى

فى الأقواس والزوايا والأوتار

« نظرية ٤٧ »

الزوايا المركزية المتساوية فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية
تقابلها أقواس متساوية



(شكل ١٠١)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها م' وان الزاوية المركزية م ب ا = الزاوية المركزية م' ب' ا' و

(المطلوب اثباته) أن القوس ا ب هـ = ح و د

(البرهان) نطبق الدائرة الاولى على الثانية على شرط أن يقع

المركز م على م' ونصف القطر م ا على م' ا

فن حيث ان الدائرتين متساويتان ينطبق محيط الاولى على محيط

الثانية وتقع نقطة ا على نقطة ح

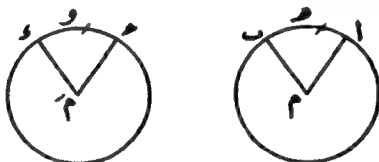
ومن حيث ان $\angle م١ = \angle ح و$ و بالفرض يقع نصف القطر $م ب$ على $م'$ و تقع نقطة $ب$ على نقطة $و$ فينتطبق اذن القوس $ا ه ب$ على القوس $ح و و$ وبذلك يتساويان وهو المطلوب

(نتيجة) اذا اختلفت زاويتان مركبتان في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية فالزاوية الكبرى يقابلها القوس الاكبر

« نظرية ٤٨ »

(وهي عكس نظرية ٤٧)

الاقواس المتساوية في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية تقابلها زوايا مركزية متساوية



(شكل ١٠٢)

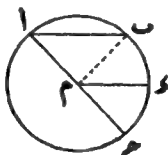
(المفروض) ان الدائرة التي مركزها $م$ تساوي الدائرة التي مركزها $م'$ وان القوس $ا ه ب =$ القوس $ح و و$
(المطلوب اثباته) أن الزاوية المركزية $م١ =$ الزاوية المركزية $ح و م'$

(البرهان) نطبق الدائرة الاولى على الثانية على شرط أن يقع

المركز $م$ على $م'$ ونصف القطر $١م$ على $م'$ ح
 فن حيث ان الدائرتين متساويتان ينطبق محيط الاولى على محيط
 الثانية وتقع نقطة ١ على نقطة ح
 ومن حيث ان القوس $١هـ ب =$ القوس ح و و بالفرض تقع
 نقطة ب على نقطة و
 فتطبق اذن الزاوية المركزية $١م ب$ على ح $م'$ و وبذلك
 تتساويان وهو المطلوب
 (نتيجة) اذا اختلف قوسان في دائرة واحدة أو في دوائر
 متساوية فالقوس الاكبر تقابله الزاوية المركزية الكبرى

تمارين (١٧)

(١) اذا فرضت دائرة مركزها $م$ ورسم فيها القطر $١م$ ح والوتر
 $١ب$ ثم رسم نصف القطر $م و$ يوازي $١ب$ فبرهن على ان نقطة و
 منتصف القوس ب ح



(شكل ١٠٣)

(البرهان) نصل من $م$ الى ب

فن حيث ان $١م = ب م$ تكون $١م ب = ب م و$

(ظلية ٦)

ولكن $\angle م ب د = \angle م ب ا$ (بالتبادل)

$\angle م ح د = \angle م ح ا$ (بالتناظر)

اذن $\angle م ب د = \angle م ح د$

ويكون القوس $ب د =$ القوس $ح د$ (نظرية ٤٧)

اى ان نقطة $د$ منتصف القوس $ح ب$ (وهو المطلوب)

(٢) $\angle ا ب د = \angle ا ب ا$ ثلاث نقط على محيط دائرة مركزها $م$ فاذا فرض أن الوتر $ب ا =$ الوتر $ح ب$ فبرهن على أن نقطة $د$ منتصف القوس $ا ب$ وان $م د$ يقطع الوتر $ا ب$ في منتصفه

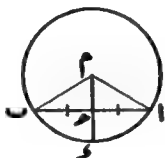
(٣) اذا فرضت نقطة مثل $د$ على محيط دائرة مركزها $م$ وكان بعدا $د$ عن نصفي القطرين $ا ب د$ متساويين فبرهن على أن القوس $ا د$ يساوى القوس $ب د$

(٤) اذا رسم وترىوازي قطر دائرة فبرهن على انهما يحصران بينهما قوسين متساويين

(٥) اذا رسم وتران متوازيان في دائرة فبرهن على انهما يحصران بينهما قوسين متساويين

د نظرية ٤٩

نصف الفطر الذى ينصف وترأ في دائرة عمود على هذا الوتر
ومنصف لقوسه



(شكل ١٠٤)

(المفروض) أن AB وتر في الدائرة التي مركزها O وأن M و
ينصف الوتر AB في H

(المطلوب اثباته) أن OM و عمود على AB وأن نقطة M منتصف
القوس AB

(البرهان) أولا - نصل OA و OB فيحدث المثلثان OAH و
 OBH

في هذين المثلثين

$$\left. \begin{array}{l} \text{مشارك بينهما} \\ \text{بالفرض} \\ \text{لانهما نصفا قطرين} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle OAH = \angle OBH \\ \angle AOH = \angle BOH \end{array}$$

ينطبق $\triangle OAH$ على $\triangle OBH$ (نظرية ٨)

وينتج ان $\angle OAH = \angle OBH$

ولكون هاتين الزاويتين متكاملتين تكون كل منهما قائمة

اي ان OM و عمود على AB وهو المطلوب

ثانياً - من تساوى المثلثين OAH و OBH ينتج ان

$$\angle AOM = \angle BOM$$

ومن حيث ان هاتين الزاويتين مركبتان بالنسبة للدائرة

يكون القوس $ا ب$ = القوس $ب ا$ (نظرية ٤٧)
وتكون نقطة $و$ منتصف القوس $ا ب$ وهو المطلوب

« نظرية ٥٠ »

(وهي عكس نظرية ٤٩)

نصف القطر المرسوم عموداً على وتر ينصفه وينصف قوسه



(شكل ١٠٠)

(المفروض) ان $ا ب$ وتر في الدائرة التي مركزها $م$ وأن $م و$ عمود على $ا ب$

(المطلوب اثباته) ان نقطة $و$ منتصف الوتر $ا ب$ وأن نقطة $و$ منتصف القوس $ا ب$

(البرهان) اولاً - نصل $م ا$ $م ب$ فيحدث المثلثان $م ا و$ $م ب و$

$م و$ $م و$

في هذين المثلثين القاعى الزاوية

مشارك بينهما
لانهما نصفاً قطرين

من حيث ان $م ا = م ب$

(نظرية ٢١)

ينطبق $\triangle م ا و$ على $\triangle م ب و$

وينتج ان $ا و = ب و$

اى ان نقطة ح منتصف الوتر ا ب وهو المطلوب
 ثانياً — لاثبات ان نقطة و منتصف القوس ا ب
 راجع برهنة القسم الثانى من النظرية السابقة
 (نتيجة) المستقيم المقام عموداً على منتصف وتر يمر بمركز دائرته

« نظرية ٥١ »

حول ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يمر محيط دائرة
 واحدة ولا يمر سواه



(شكل ١٠٦)

(المفروض) ان ا ب ح ثلاث نقط ليست على استقامة
 واحدة

(المطلوب اثباته) انه يمر بهذه النقط محيط دائرة واحد ولا
 يمر غيره

(البرهان) اولاً — نصل ا ب ح
 ثم ننصف ا ب في و ونقيم و ح عموداً على ا ب
 وكذلك ننصف ب ح في و ونقيم و ح عموداً على ب ح

فن حيث ان \angle ليس على استقامة \angle يقطع العمودان في نقطة مثل \angle

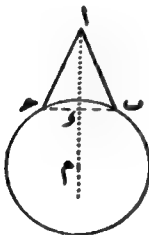
ومن حيث ان نقطة \angle هي احدى نقط العمود المقام من منتصف \angle وكذلك احدى نقط العمود المقام من منتصف \angle فتكون على ابعاد متساوية من \angle \angle \angle \angle (الحال الهندسية مثال ٣) اي انه اذا ركز في نقطة \angle ورسمت دائرة بنصف قطر يساوي \angle فان محيط هذه الدائرة يمر بالنقط \angle \angle \angle \angle

وهو المطلوب

(ثانياً) ومن حيث ان العمودين \angle \angle \angle لا يقطعان الا في نقطة واحدة فلا يوجد الا دائرة واحدة مركزها تقاطع العمودين يمر محيطها بالنقط الثلاث \angle \angle \angle وهو المطلوب

تمارين (١٨)

(١) اذا فرضت نقطة مثل \angle خارج دائرة مركزها \angle ورسم منها مستقيمان متساويان الى محيط الدائرة مثل \angle \angle \angle فبرهن على ان منتصف زاوية \angle \angle يمر بالمركز



(المفروض) ان نقطة \angle خارج الدائرة وان $\angle = \angle$

(المطلوب اثباته) ان منتصف \angle \angle \angle يمر بالمركز \angle

(البرهان) نصل \angle \angle فيحدث المثلث \angle \angle \angle متساوي الساقين ($\angle = \angle$ \angle بالفرض) (شكل ١٠٧)

فاذا نصفت زاوية رأسه α بالمستقيم α و يكون هذا المنصف عموداً على الوتر β

ومن حيث ان α عمود على الوتر β يمر بالمركز γ

(نتيجة نظرية ٥٠) وهو المطلوب

(٢) $\alpha \beta \gamma$ وتران متساويان في دائرة برهن على ان منصف

$\alpha \beta \gamma$ يمر بالمركز

(٣) اذا قطع مستقيم دائرتين متحدتي المركز فان جزأيه المحصورين

بين محيطيهما متساويان

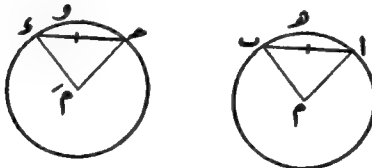
(٤) دائرتان مركزاهما $\gamma \delta \epsilon$ متقاطعتان في $\alpha \beta \gamma$ برهن على

ان مركزيهما $\gamma \delta \epsilon$ ومنصف الوتر المشترك $\alpha \beta \gamma$ على استقامة واحدة

« نظرية ٥٢ »

الاقطار المتساوية في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية اقواسها

متساوية



(شكل ١٠٨)

(المفروض) ان الدائرة التي مركزها γ تساوي الدائرة التي

مركزها γ وان الوتر $\alpha \beta \gamma$ يساوي الوتر $\delta \epsilon \zeta$

(المطلوب اثباته) ان القوس $ا ه ب =$ القوس $ح و و$
 (البرهان) نصل $ا م ب م و م$ فيحدث المثلثان
 $ا م ب$ و $ح م و$
 في هذين المثلثين

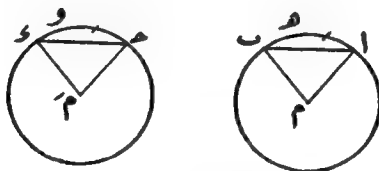
($ا م = ح م$) لانهما نصف قطرى دائرتين متساويتين
 من حيث ان $ا م ب = ح م و$ (« « « « «)
 ($ا ب = ح و$) بالفرض

يتساوى المثلثان $ا م ب$ و $ح م و$ (نظرية ٨)
 وينتج ان $ا م ب = ح م و$
 ومن حيث ان هاتين الزاويتين مركزييتين
 فالقوس $ا ه ب =$ القوس $ح و و$
 وهو المطلوب

« نظرية ٥٣ »

(وهي عكس نظرية ٥٢)

الاقواس المتساوية في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية أوتارها
 متساوية



(شكل ١٠٩)

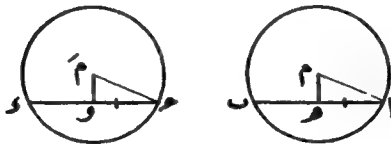
(المفروض) أن الدائرة التي مركزها م تساوى الدائرة التي

مركزها م' وان القوس ا ه ب = القوس ح و د
 (المطلوب اثباته) ان الوتر ا ب = الوتر ح و د
 (البرهان) نصل ١٢ ١٦ ٢٦ ٢٦ م' ح ٦ م' د
 في هذين المثلثين

$\left. \begin{array}{l} ١٢ = ١٦ \text{ ح } م' \\ ٢٦ = ٢٦ م' د \\ ٢٦ = ٢٦ د م' \end{array} \right\} \text{ من حيث ان } (\text{ » » » » » })$
 (نظرية ٤٨) ينطبق $\triangle ٢٦ ٢٦ م' د$ على $\triangle ٢٦ م' د$
 (نظرية ٤) وينتج ان الوتر ا ب = الوتر ح و د
 وهو المطلوب

« نظرية ٥٤ »

الاوراق المتساوية في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية أبعادها عن المركز أو المراكز متساوية



(شكل ١١٠)

(المفروض) ان الدائرة التي مركزها م تساوى الدائرة التي مركزها

م' وان الوتر ا ب يساوى الوتر ح د وان م ه ٦ م' و عمودان على ا ب ٦ ح د

(المطلوب اثباته) ان العمود م ه يساوى العمود م' و

(البرهان) فصل ١٢ ٦ م' ح فيحدث المثلثان م ا ه ٦ م' ح و في هذين المثلثين القائمي الزاوية

من حيث ان | ١١ = ح م' (لانهما نصف قطرى دائرتين متساويتين) | ١٢ = ح و (لانهما نصف قوترين متساويين نظرية ٥٠)

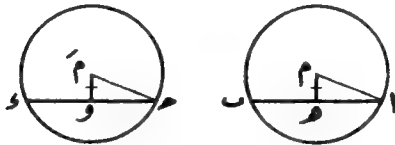
يتساوى المثلثان (نظرية ٢١)

وينتج أن م ه = م' و وهو المطلوب

« نظرية ٥٥ »

(وهى عكس نظرية ٥٤)

الاقطار التى على ابعاد متساوية من مركز دائرة أو مراكز دوائر متساوية تكون متساوية



(شكل ١١١)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها م تساوى الدائرة التى مركزها م' وان ا ب ٦ ح د وتران فى الدائرتين وان م ه العمود

على AB يساوى M' و العمود على CD
 (المطلوب اثباته) ان الوتر $AB =$ الوتر CD
 (البرهان) نصل $M'G$ $M'H$ فيحدث المثلثان $M'GH$ $M'HD$ و
 في هذين المثلثين القائى الزاوية
 من حيث ان $\left. \begin{array}{l} M'G = M'H \\ M'G = M'H \end{array} \right\}$ لانهما نصفا قطرى دائرتين متساويتين
 بالقرض

يتساوى المثلثان (نظرية ٢١)

وينتج ان $GH = HD$

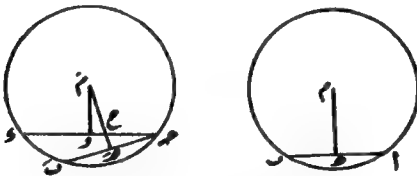
ولكن $AG = HB$ يساوى نصف AB (نظرية ٥٠)

$GH = HD$ يساوى نصف CD (٥٠ »)

اذن الوتر $AB =$ الوتر CD وهو المطلوب

« نظرية ٥٦ »

اذا اختلف وتران في دائرة واحدة أو دوائر متساوية كان بعد
 الوتر الاكبر عن المركز أصغر من بعد الوتر الاصغر



(شكل ١١٢)

(المفروض) ان الدائرة التى مركزها M تساوى الدائرة التى

مركزها م' وان الوتر ا ب اصغر من الوتر ح د وان م ه ٦ م' و
عمودان على ا ب ٦ ح د

(المطلوب اثباته) ان م ه اكبر من م'

(البرهان) نطبق الدائرة التي مركزها م على الدائرة التي مركزها

م' بحيث يقع المركز م على المركز م' وتقع النقطة ا على ح

فن حيث ان الدائرتين متساويتان بالفرض ينطبق محيط الاولى
على محيط الثانية

ومن حيث ان الوتر ا ب اصغر من الوتر ح د بالفرض فيكون
القوس الاصغر ا ب اصغر من القوس الاصغر ح د وتأخذ نقطة ب وضماً
بين النقطتين ح ٦ و مثل ب' وياخذ العمود م ه الوضع م' ه'

ولكن من حيث ان ح د ٦ ح ب' يتلاقيان في نقطة ح فلا
بد ان يأخذ العمود م' ه' اتجاهاً غير العمود م' و نفرض انه يقطع
ح د في نقطة ع

ولكن م' ح اكبر من م' و

٦ م' ه' اكبر من م' ح

اذن م' ه' اكبر من م' و

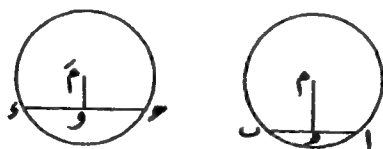
أى ان م ه اكبر من م' و

وهو المطلوب

« نظرية ٥٧ »

(وهي عكس نظرية ٥٦)

اذا اختلف بعدا وترين في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية
عن المركز كان اكبرهما أصغرهما بعداً



(شكل ١١٣)

(المفروض) ان الدائرة التي مركزها م تساوى الدائرة التي مركزها م' وان م ه العمود على الوتر ا ب اكبر من م' و العمود على الوتر ح و

(المطلوب اثباته) ان الوتر ا ب اصغر من الوتر ح و

(البرهان) ان لم يكن الوتر ا ب اصغر من الوتر ح و فاما ان يساويه واما أن يكون اكبر منه

فان كان الوتر ا ب = الوتر ح و

لزم ان يكون العمود م ه = العمود م' و (نظرية ٥٤) وهذا خلاف الفرض

وان كان الوتر ا ب اكبر من الوتر ح و

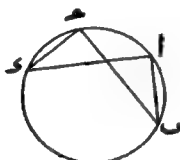
لزم ان يكون العمود م ه اصغر من العمود م' و (نظرية ٥٦) وهذا خلاف الفرض ايضاً

وعلى ذلك فالوتر ا ب لا يمكن ان يساوى الوتر ح و كما انه لا يمكن ان يكون اكبر منه

اذن يجب ان يكون الوتر ا ب اصغر من الوتر ح و وهو المطلوب

تمارين (١٩)

(١) $\angle \alpha$ و $\angle \beta$ وتران متقاطعان في دائرة فاذا فرض انهما متساويان فبرهن على ان الوتر $\alpha =$ الوتر β



(شكل ١١٤)

(البرهان) من حيث ان الوتر $\alpha =$ الوتر β يكون القوس $\alpha =$ القوس β (نظرية ٥٢)

وبطرح القوس الاصغر α من طرفي المتساوية السابقة يكون
القوس $\alpha =$ القوس β - القوس $\alpha =$ القوس β
اي ان القوس $\alpha =$ القوس β

وبذلك يكون الوتر $\alpha =$ الوتر β (نظرية ٥٣)
وهو المطلوب

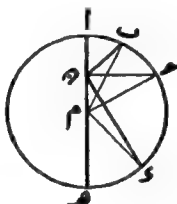
(٢) اذا رسمت في دائرة اوتار متلاقية ومتساوية مثل α و β
 α و β و γ و δ فبرهن على ان الوتر α يساوي الوتر β
 $=$ الوتر γ

(٣) في شكل (١١٤) اذا فرض ان الوتر $\alpha =$ الوتر β
فبرهن على ان الوتر $\alpha =$ الوتر β

« نظرية ٥٨ »

إذا فرضت نقطة داخل دائرة غير مركزها ورسم منها عدة مستقيمت إلى المحيط كان

- (أولاً) أكبر هذه المستقيمت هو المار بالمركز
- (ثانياً) أصغر هذه المستقيمت هو امتداد الأكبر ليكون قطراً
- (ثالثاً) المستقيم الأكبر ما كان أقرب إلى المركز



(شكل ١١٥)

(المفروض) ان نقطة ه داخل الدائرة التي مركزها م وأن د ا
 ه ب ه ح ه د ه ه عدة مستقيمت اياً كانت رسمت
 من ه إلى المحيط وان ا ه م ه قطر في الدائرة
 (المطلوب اثباته) ان ه م ه هو أكبر هذه المستقيمت وأن د ا
 هو أصغرها وأن د ه أكبر من ه ح

(البرهان) نصل م ه و م ح و م ب ثم نقول

اولاً - في المثلث ه م د نعلم أن

$$ه م + م د < ه د$$

ولكن م د = م ه لانها نصف قطرین

(نظرية ١٣)

اذن $\angle 2 + \angle 2 < \angle 1$

أى ان $\angle 2 < \angle 1$

وكذلك يبرهن على أن $\angle 2$ اكبر من أى مستقيم آخر يرسم من $\angle 2$ الى المحيط

وبذلك يكون $\angle 2$ اكبر هذه المستقيمت وهو المطلوب

ثانياً - فى المثلث $\triangle ABC$ نعلم أن

$$\angle C = \angle 2 - \angle 1 \quad (\text{نظرية ١٤})$$

ولكن $\angle C = \angle 1$ لانهما نصفا قطرين

$$\text{اذن } \angle 1 = \angle 2 - \angle 1$$

$$\text{أى ان } \angle 1 > \angle 2$$

وكذلك يبرهن على ان $\angle 1$ أصغر من أى مستقيم آخر يرسم من

$\angle 1$ الى المحيط وبذلك يكون أصغر هذه المستقيمت وهو المطلوب

ثالثاً - فى المثلثين $\triangle ABC$ و $\triangle A'B'C'$

مشارك بين المثلثين

$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle A' \\ \angle B = \angle B' \end{array} \right\} \text{من حيث ان } \angle C = \angle C' \text{ لانهما نصفا قطرين}$$

$$\angle C > \angle A \text{ و } \angle C > \angle B$$

يكون $\angle C$ و $\angle C'$ اكبر من $\angle A$ و $\angle B$

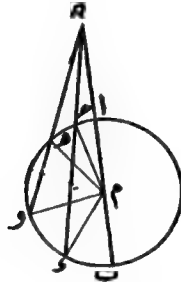
(نظرية ٢٢)
وهو المطلوب

« نظرية ٥٩ »

إذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها عدة قواطع لها كان

(أولا) اكبر هذه القواطع هو المار بالمركز

- (ثانياً) القاطع الاكبر ما كان اقرب الى المركز
 (ثالثاً) اصغر الاجزاء الخارجة للقواطع هو جزء القاطع المار بالمركز
 (رابعاً) الجزء الخارج الاصغر ما كان قاطعه اقرب الى المركز



(شكل ١١٦)

(المفروض) ان نقطة δ خارج الدائرة التي مركزها $م$ وأن
 $\delta ا ب \delta ح و \delta د \delta ه$ و عدة قواطع رسمت من δ لهذه الدائرة
 كما يتفق وان $\delta ا ب$ يمر بمركز الدائرة
 (المطلوب اثباته) ان $\delta ا ب$ هو اكبر هذه القواطع وأن $\delta ح و$
 اكبر من $\delta ه و$ وأن $\delta ا$ اصغر الاجزاء الخارجة لجميع القواطع
 وان $\delta ح$ اصغر من $\delta ه$

(البرهان) فصل $م ح و م د و م ه$ و $م و$ ثم نقول

اولاً - في المثلث $\delta م و$ نعلم أن

$$\delta م + م و < \delta و . \quad (نظرية ١٣)$$

ولكن $\delta م = م و$ لانهما نصف قطرین

اذن $\delta + \epsilon + \zeta < \eta$

اى ان $\delta < \eta$

وكذلك يبرهن على ان δ اكبر من اى قاطع آخر يرسم من δ للدائرة وبذلك يكون δ اكبر هذه القواطع (وهو المطلوب)

ثانياً - فى المثلثين $\delta \epsilon \zeta$ و $\delta \epsilon \eta$

مشارك بين المثلثين

من حيث ان $\delta \epsilon \zeta$ و $\delta \epsilon \eta$ لانهما نصفاً قطرين

$\delta \epsilon \zeta$ و $\delta \epsilon \eta$ اكبر من $\delta \epsilon \eta$ و

يكون $\delta \epsilon \zeta$ اكبر من $\delta \epsilon \eta$ (نظرية ٢٢)

وهو المطلوب

ثالثاً - فى المثلث $\delta \epsilon \zeta$ نعلم ان

$\delta - \epsilon > \zeta$ (نظرية ١٤)

ولكن $\delta - \epsilon = \eta$ لانهما نصفاً قطرين

اذن $\delta - \epsilon > \eta$

اى أن $\delta > \eta$

وكذلك يبرهن على أن δ اصغر من اى جزء خارجى آخر

وبذلك يكون δ اصغر الاجزاء الخارجة وهو المطلوب

رابعاً - فى المثلث $\delta \epsilon \zeta$ باعتبار ان نقطة δ داخله يكون

$\delta + \epsilon < \delta + \epsilon + \zeta$ (نظرية ١٥)

ولكن $\delta + \epsilon = \eta$ لانهما نصفاً قطرين

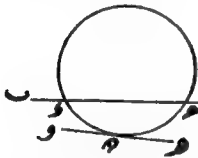
اذن $\delta + \epsilon < \eta$ وهو المطلوب

- اذن $1 = 2 = 3$ (وهو المطلوب)
- (٢) اذا علمت دائرتان متساويتان ورسم مستقيم يوازي المستقيم الذي يصل مركزيهما فبرهن على ان الوترين الحاصلين في الدائرتين متساويان
- (٣) اذا علمت دائرتان متساويتان ورسم مستقيم من منتصف المستقيم الذي يصل مركزيهما بحيث يقطعهما فبرهن على ان الوترين الحاصلين متساويان
- (٤) اذا تقاطع وتران في دائرة وكان المستقيم الذي يصل نقطة تقاطعهما بالمركز منصفاً للزاوية المحصورة بينهما كان هذان الوتران متساويين
- (٥) اذا قطع مستقيم دائرتين متقاطعتين وكان موازياً لوترهما المشترك فان جزأى القاطع المحصورين بين محيطى الدائرتين متساويان
- (٦) اذا تقاطعت دائرتان فالى مستقيمين متوازيين يمران بنقطتي تقاطعهما وينتهيان بالمحيطين يكونان متساويين
- (٧) المستقيم الذي يصل منتصفى وترين متوازيين في دائرة يمر بمركزها

الباب الثالث

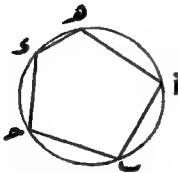
في التماس

١ - المستقيم الذي يقطع محيط الدائرة في نقطتين يقال له قاطع
مثل $ا ب$ (شكل ١١٨) فانه يقطع محيط
الدائرة في النقطتين $ح و$



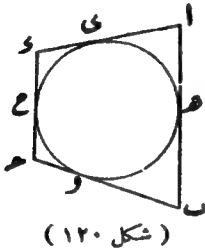
٢ - اذا اشترك مستقيم مع محيط
الدائرة في نقطة واحدة يقال له تماس
للدائرة مثل $هـ$ و شكل (١١٨) فانه (شكل ١١٨)

لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة $هـ$ وفي هذه الحالة يقال ان
المستقيم $هـ و$ يمس الدائرة في نقطة $هـ$ وان نقطة $هـ$ نقطة التماس



(شكل ١١٩)

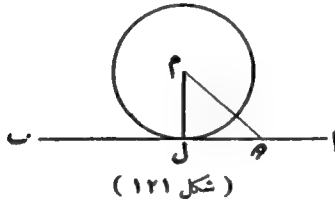
٣ - اذا مر محيط الدائرة بـ $عوس$
شكل مستقيم الاضلاع مثل $ا ب ح د هـ$
(شكل ١١٩) يقال ان مستقيم الاضلاع
مرسوم داخل الدائرة وان الدائرة مرسومة
عليه أو خارجه



٤ - اذا مست جميع اضلاع شكل مستقيم الاضلاع محيط الدائرة مثل ا ب ح د (شكل ١٢٠) يقال ان مستقيم الاضلاع مرسوم خارج الدائرة وان الدائرة مرسومة داخله

« نظرية ٦٠ »

تماس الدائرة عمود على نصف القطر المار بنقطة التماس



(المفروض) ان ا ب ممس الدائرة التي مركزها م في نقطة ل
(المطلوب اثباته) ان م ل عمود على ا ب
(البرهان) من تعريف المماس نعلم ان نقطة التماس ل هي
النقطة الواحدة التي يشترك فيها ا ب مع محيط الدائرة
فاذا أخذنا نقطة غير ل على المستقيم ا ب مثل نقطة د كانت هذه
النقطة خارجة عن محيط الدائرة
ويكون اذن م ل أصغر من م د

كذلك يبرهن على أن $م$ ل $اصفر$ من اى مستقيم آخر يرسم من $م$ الى اى نقطة أخرى على $ا ب$ غير $ل$

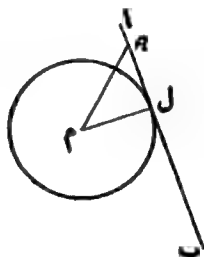
فيكون $م$ ل عموداً على $ا ب$ (نظرية ١٧) وهو المطلوب
نتيجة ١ — العمود المقام من نقطة التماس على المماس يمر بمركز الدائرة

نتيجة ٢ — العمود النازل من مركز الدائرة على المماس يمر بنقطة التماس

« نظرية ٦١ »

(وهى عكس نظرية ٦٠)

إذا رسم من نهاية نصف القطر عموداً عليه كان العمود مماساً للدائرة



(شكل ١٢٢)

(المفروض) أن $م$ ل نصف قطر فى الدائرة التى مركزها $م$ وأن
 $ا ب$ عمود على $م ل$ فى نقطة $ل$

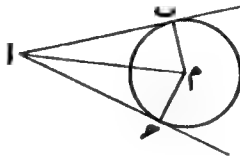
(المطلوب اثباته) ان I بمس الدائرة
(البرهان) نأخذ نقطة على I غير مثل نقطة \odot
فن حيث ان M عمود على I يكون $M \odot$ مائلا بالنسبة
الى I

ويكون $M \odot < M$ (نظرية ١٦)
وبذلك تكون نقطة \odot خارجة عن محيط الدائرة
وكذا يبرهن على ان اى نقطة أخرى على I غير تكون
خارجة عن الدائرة

اذن I بمس الدائرة فى نقطة L (وهو المطلوب)
(نتيجة) من نقطة مفروضة على محيط دائرة لا يمكن ان يمد
منها الا مماس واحد للدائرة

« نظرية ٦٢ »

اذا فرضت نقطة خارج دائرة ورسم منها مماسان لها كان المماسان
متساويين



(شكل ١٢٣)

(الفروض) ان نقطة I خارجة عن محيط الدائرة التى مركزها M
وان كلا من I A B C مماس للدائرة

(المطلوب اثباته) ان $a = b$ ح
 (البرهان) نصل a ب c فيحدث المثلثان a ب ح
 و a ح c
 في هذين المثلثين

مشارك بين المثلثين a ح c }
 من حيث ان a ح c }
 لانهما نصفان قطرين a ح c }
 (نظرية ٦٠)
 يتساوى المثلثان
 وينتج من تساويهما أن $a = b$ ح
 وهو المطلوب (نظرية ٦١)

تمارين (٢١)

(١) a ح d شكل رباعي مرسوم خارج الدائرة (شكل ١٢٠)
 برهن على ان a ب ح d + a ح d = a ح d + a ح d
 (البرهان) نفرض ان اضلاع الشكل الرباعي تمس محيط الدائرة
 في e و f و g و h

فيكون
 a ح d = e ح d ١
 a ب ح d = e ح d ٢
 a ح d = e ح d ٣
 a ح d = e ح d ٤
 (نظرية ٦٢)

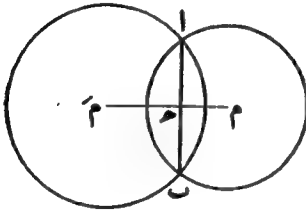
وبالجمع يكون

$$a$$

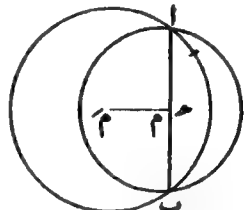
- أى أن $ا ب + ح د = ب ح + ا د$ وهو المطلوب
- (٢) اذا فرضت نقطة خارج دائرة مثل $ا$ ورسم منها مماسان لمحيطها مثل $ا ب ا ج$ (شكل ١٢٣)
- فبرهن على أن $ا ب ا ج = ا ب ا ج$
- (٣) اذا فرضت دائرتان متحدتان في المركز ورسمت جملة اوتار في الدائرة الخارجة تمس الدائرة الداخلة فبرهن على أن هذه الاوتار متساوية وان نقطة تماس كل وتر تنصفه
- (٤) اذا رسم متوازي اضلاع خارج الدائرة فبرهن على انه معين
- (٥) $ا ب ح د ه و$ شكل مستقيم الاضلاع مرسوم خارج الدائرة برهن على أن $ا ب + ح د + ه و = ب ح + د ه + و ا$
- (٦) اذا فرضت دائرة مركزها $م$ ورسم لها مماسان متوازيان وتلاقى هذا المماسان مع مماس ثالث للدائرة في $س$ فبرهن على أن زاوية $س م$ قائمة
- (٧) في شكل ١٢٠ اذا فرض أن $م$ مركز الدائرة فبرهن على أن $ا ب ا ج + ب ح ا د = ا د ا ب$
- (٨) في شكل ١٢٣ اذا وصل من $ب$ الى $ح$ فبرهن على أن زاوية $ا ب ح =$ زاوية $ا ج ب$

« نظرية ٦٣ »

اذا تقاطع محيطا دائرتين كان خط مركزيهما عموداً على وترهما المشترك ومنصفاً له



(شكل ١٢٠)



(شكل ١٢٤)

(الفروض) ان الدائرتين اللتين مركزاهما M و M' تقاطعان في قطبي A و B
(المطلوب اثباته) ان MM' ينصف الوتر المشترك AB ويكون عموداً عليه

(البرهان) اولاً — اذا كان مركزا الدائرتين في جهة واحدة من الوتر المشترك AB كما في شكل ١٢٤

فلذلك ننصف AB في نقطة H ثم نرسم من H عموداً على AB في جهة المراكز فن حيث ان AB وتر في كل من الدائرتين يمر العمود بكل من المراكز M و M' (نتيجة نظرية ٥٠)
اي ان امتداد MM' يمر بمنصف AB ويكون عموداً عليه (وهو المطلوب)

ثانياً — اذا كان مركزا الدائرتين في جهتين مختلفتين من الوتر المشترك AB كما في شكل ١٢٥

فلذلك ننصف AB في نقطة H ثم نرسم من نقطة H عمودين على AB احدهما في جهة المركز M والثاني في جهة المركز M'

فن حيث أن AB وتر في كل من الدائرتين يمر العمود الاول بالمركز M والعمود الثانى بالمركز M'

ويكون M ح $6M'$ ح على استقامة واحدة (نظرية ٢)
أى ان MM' يمر بمنتصف AB ويكون عموداً عليه
وهو المطلوب

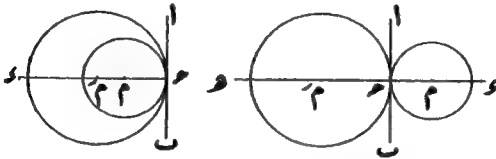
(تعريف) اذا اشترك محيطا دائرتين في نقطة واحدة يقال انهما متماستان مثل الدائرتين في كل من شكلى ١٢٦ ١٢٧

ملاحظة ١ — اذا كانت احدى الدائرتين التماسيتين خارج الدائرة الاخرى كما في شكل ١٢٦ يقال انهما متماستان من الخارج واذا كانت احدهما داخل الاخرى كما في شكل ١٢٧ يقال انهما متماستان من الداخل

ملاحظة ٢ — اذا تحركت احدى الدائرتين المتقاطعتين (شكل ١٢٥) حول A بحيث تكون هذه النقطة ثابتة فان المستقيم AB في حال وقوع B على A يمر بنقطتين متحدتين على محيطى الدائرتين المذكورتين ويكون مماساً لكل من الدائرتين وحينئذ فلكل دائرتين متماستين مماس مشترك في نقطة تماسهما

« نظرية ٦٤ »

اذا تماس محيطا دائرتين كانت نقطة التماس على خط المراكزين



(شكل ١٢٧)

(شكل ١٢٦)

(المفروض) ان الدائرتين اللتين مركزاهما M و M' متماستان في نقطة $ح$

(المطلوب اثباته) ان M و M' يمر بنقطة التماس $ح$

(البرهان) اولاً - عند ما تكون الدائرتان متماستين من الخارج

(شكل ١٢٦)

لذلك نرسم المماس المشترك $ا ب$ ونرسم من نقطة $ح$ المستقيم

$ح و$ عموداً على $ا ب$ وكذا نرسم $ح ه$ عموداً على $ا ب$

فيمر $ح و$ بالمركز $م$ وكذا يمر $ح ه$ بالمركز $م'$ (نتيجة ١ نظرية ٦٠)

ويكون $ح م$ على استقامة $ح م'$ (نظرية ٢)

أى ان M و M' يمر بنقطة التماس $ح$ وهو المطلوب

ثانياً - عند ما تكون الدائرتان متماستين من الداخل (شكل ١٢٧)

لذلك نرسم من $ح$ عموداً على المماس المشترك في جهة المركزين

مثل $ح و$

فيمر $ح و$ بكل من المركزين M و M' كما سبق

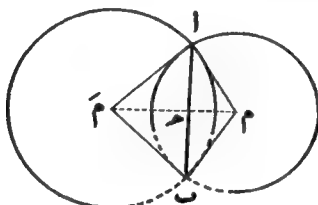
أى ان امتداد M يمر بنقطة التماس $ح$ وهو المطلوب

(نتيجة) اذا تماسبت دائرتان من الخارج كان البعد بين مركزيهما

يساوى مجموع نصفى القطرين واذا تماسا دائرتان من الداخل كان
البعء بين مركزيهما يساوى الفرق بين نصفى القطرين

« نظرية ٦٥ »

اذا اشترك محيطا دائرتين فى نقطة ليست على خط مركزيهما فانهما
يشتركان فى نقطة غيرها



(شكل ١٢٨)

(المفروض) ان الدائرتين اللتين مركزيهما م' م' مشتركان فى
نقطة ا (شكل ١٢٨) وان هذه النقطة ا ليست على م' م'
(المطلوب اثباته) ان الدائرتين مشتركان فى نقطة اخرى غير ا
(البرهان) من نقطة ا نزل العمود ا ح على م' م' ونعده الى ب
ونجعل ح ب = ح ا ثم نصل م' م' ب م' م' ب م' م' ب م' م' ب
المثلثات الاربعة م' م' ب م' م' ب م' م' ب م' م' ب
ثم نقول فى المثلثين م' م' ب م' م' ب

ح ب = ح ا بالعمى
م' م' ب م' م' ب مشترك بين المثلثين
من حيث ان م' م' ب م' م' ب
م' م' ب م' م' ب بالقيام

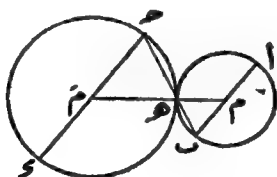
يتساوى المثلثان من عامة الوجوه
وينتج من تساويهما ان

$$١٢ = ٣٢$$

اى ان نقطة ب تقع على محيط الدائرة التى مركزها م
وباثبات تساوى المثلثين م' ح ا ٦ م' ح ب على النحو السابق
نبرهن كذلك على ان نقطة ب تقع على محيط الدائرة التى مركزها م'
وبذلك تشترك الدائرتان فى النقطة الثانية ب وهو المطلوب

تمارين (٢٢)

(١) اذا تماس محيطا دائرتين من الخارج فى نقطة ه كما فى
شكل (١٢٩) ورسم القطر ا ب فى الدائرة التى مركزها م يوازي
القطر ح و فى الدائرة التى مركزها م' فبرهن على أن ب ه على
استقامة ه ح



(شكل ١٢٩)

(البرهان) نصل م م' ٦ ب ه ٦ ح ه ثم نقول
م م' يمر بنقطة التماس ه
(نظرية ٦٤)
فيحدث المثلثان المتساويا الساقين م ب ه ٦ م' ح ه

فيري في هذين المثلثين ان $\angle م ب ح = \angle م ح ب$ بالتبادل
 اذن $\angle م ب ح = \angle م ح ب$ $\angle م ح ب = \angle م ح ب + \angle م ح ب$
 ولكن $\angle م ب ح = \angle م ح ب$ (نظرية ٦)
 $\angle م ح ب = \angle م ح ب + \angle م ح ب$
 اذن $\angle م ح ب = \angle م ح ب$
 أى ان $\angle م ح ب = \angle م ح ب$
 وهذا لا يتأتى الا اذا كان $\angle م ح ب$ على استقامة $\angle م ح ب$

وهو المطلوب

(٢) اذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين مركزاهما $ح$
 و $و$ ويقطع محيط الاولى في $ا$ والثانية في $ب$ فبرهن على ان $ح ا$
 يوازي $و ب$

(٣) اذا تماس محيطا دائرتين من الخارج في نقطة $ا$ ورسم
 المستقيم $ب ح$ يمرس احدى الدائرتين في $ب$ والثانية في $ح$ فبرهن على
 أن $\angle ب ا ح$ قائمة وان المماس المشترك المرسوم من $ا$ ينصف
 $ب ح$

(٤) اذا رسم مستقيم يمر بنقطة تماس دائرتين متماستين من
 الخارج وينتهى بالمحيطين فبرهن على ان المماسين للدائرتين من طرفي
 هذا المستقيم متوازيان

الباب الرابع

في الزوايا المركزية والمحيطية

تماريف

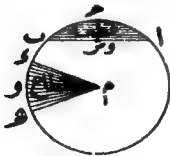
١ - تقدم في الباب الاول ان الزاوية المركزية هي ما كان رأسها في مركز الدائرة وضلعها نصفين قطرين مثل $\angle \alpha$ ب شكل (١٠٠)



(شكل ١٣٠)

٢ - الزاوية المحيطية هي ما كان رأسها على المحيط وضلعها وترين في الدائرة مثل $\angle \alpha$ ب شكل (١٣٠)

٣ - القطعة هي جزء الدائرة المحصور بين قوس ووتر مثل القطعة ا ب ح شكل (١٣١) ويسمى الوتر أحياناً بقاعدة القطعة



(شكل ١٣١)

٤ - الزاوية المرسومة في قطعة هي ما كان رأسها على قوس القطعة وطرفاها متجهين بطرفي قاعدتها

فالزاوية ا ب ح شكل (١٣٠) يقال انها مرسومة في القطعة ا ب لان رأسها على قوسها وضلعها ا ب ح ب متجهين بطرفي قاعدتها ا ب

٥ - وتر الدائرة الذي لا يمر بالمركز يقسمها الى جزأين غير

متساويتين يسمى أكبرهما القطعة الكبرى وأصغرهما القطعة الصغرى
٦ - القطاع هو جزء الدائرة المحصور بين قوس ونصف قطرين
مثل القطاع م ه و شكل (١٣١)

في تقدير الزوايا المركزية

ينقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ قدماً متساوية كل منها يسمى درجة
ويرمز اليه بالرمز (°) والزاوية المركزية تقاس بطول القوس المحصور
بين ضلعها منسوبا هذا الطول الى طول محيط الدائرة المرسومة فيها
الزاوية أو الى طول جزء من ٣٦٠ جزءاً من المحيط (الدرجة)

في تقدير الزوايا المحيطية

« نظرية ٦٦ »

الزاوية المحيطية تساوي نصف الزاوية المركزية المشتركة معها
في القوس المحصور بين ضلعها



(شكل ١٣٤)



(شكل ١٣٣)



(شكل ١٣٢)

(المفروض) ان $\angle A \sim \angle B$ محيطية وان $\angle C$ الزاوية المركزية المشتركة معها في القوس C

(المطلوب اثباته) ان $\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$

(البرهان) لهذه النظرية ثلاث حالات

(الحالة الاولى) عند ما يكون احد ضلعي الزاوية المحيطية ماراً بالمركز مثل $\angle A \sim \angle B$ شكل (١٣٢)

لذلك نصل CM ثم نقول ان

$$\angle A \sim \angle B = \text{الخارجية} = \angle A \sim \angle B + \angle B \sim \angle C$$

(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

ولكن $\angle A \sim \angle B$ لانها نصف قطرين

فتكون $\angle A \sim \angle B = \angle C$ (نظرية ٦)

اذن $\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$

أى ان $\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$ وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عند ما يكون مركز الدائرة بين ضلعي الزاوية المحيطية مثل $\angle A \sim \angle B$ شكل (١٣٣)

لذلك نصل CM ثم نقول أن

$$\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$$

$$\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$$

وبالجمع يكون

$$\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$$

أى أن $\angle A \sim \angle B = \frac{1}{2} \angle C$ وهو المطلوب

(الحالة الثالثة) عند ما يكون ضلعا الزاوية المحيطية في جهة

واحدة من مركز الدائرة مثل $\angle BAC$ (شكل ١٣٤)

لذلك نصل B ب C ثم نقول ان

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \quad (\text{حسب الحالة الاولى من هذه النظرية})$$

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC \quad (\text{« « « « « « »})$$

وبالطرح يكون

$$\angle BAC - \angle BAC = \frac{1}{2} (\angle BOC - \angle BOC)$$

أى ان $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$ وهو المطلوب

(ملاحظة) لسهولة تطبيق هذه النظرية في حل المسائل والبرهنة

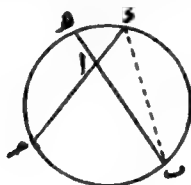
على النظريات المتعلقة بها ينطق بها احيانا على الوجه الآتى

« الزاوية المحيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها »

« نظرية ٦٧ »

الزاوية الحادثة من تقاطع وترين داخل دائرة تقاس بنصف مجموع

القوسين المحصور أحدهما بين ضلعي هذه الزاوية والثانى بين امتدادهما



(شكل ١٣٥)

(المفروض) ان الوترين AB و CD متقاطعان داخل الدائرة

في نقطة E

(المطلوب اثباته) ان \angle ب ا ح تقاس بنصف مجموع القوسين

ن ح و ه

(البرهان) نصل ب و ثم نقول ان

$$\angle$$
 ب ا ح الخارجة $= \angle$ ب ا و $+$ \angle و ا ح

(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

$$\angle$$
 ب ا ح $= \angle$ ب ا و $+$ \angle و ا ح

ولكن \angle ب ا ح و ب المحيطية تقاس بنصف القوس ب ح

و \angle و ا ح ب المحيطية تقاس بنصف القوس و ه

(نظرية ٦٦)

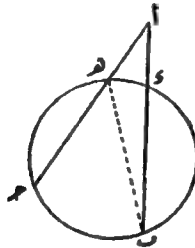
اذن \angle ب ا ح تقاس بنصف مجموع القوسين ب ح و ه و

وهو المطلوب

« نظرية ٦٨ »

الزاوية الحادة من تقاطع وترين خارج دائرة تقاس بنصف فرق

القوسين المحصورين بين ضلعيها



(شكل ١٣٦)

(الفروض) ان الوترين ب و ج ح ه يتقاطعان خارج الدائرة في نقطة ا وانهما يحصران بينهما القوسين ب ح و ج و ه (المطلوب اثباته) ان $\angle ا ب ا ح$ تقاس بنصف فرق القوسين ب ح و ج و ه

(البرهان) نصل ب ه ثم نقول ان

$$\angle ا ب ح + \angle ا ح ه = \angle ا ب ه$$

(نتيجة ١ نظرية ٣٦)

$$\angle ا ب ح + \angle ا ح ه =$$

$$\text{أى ان } \angle ا ب ا ح = \angle ا ح ه ب$$

ولكن $\angle ا ب ح$ تقاس بنصف القوس ب ح

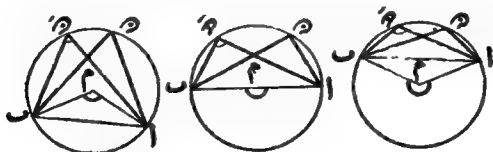
و $\angle ا ح ه$ تقاس بنصف القوس ج و ه (نظرية ٦٦)

اذن $\angle ا ب ا ح$ تقاس بنصف فرق القوسين ب ح و ج و ه

وهو المطلوب

« نظرية ٦٩ »

الزوايا المحيطية المرسومة في قطعة واحدة من الدائرة متساوية (الفروض) ان الزاويتين $\angle ا ب ا ح$ و $\angle ا د ا ح$ مرسومتان في قطعة واحدة من الدائرة التي مركزها م



(شكل ١٣٩)

(شكل ١٣٨)

(شكل ١٣٧)

(المطلوب اثباته) ان $\angle B = \angle B' = \angle B'$ سواء كانت الزاويتان مرسومتين في القطعة الصغرى كما في شكل (١٣٧) أو كانتا مرسومتين في نصف الدائرة كما في شكل (١٣٨) أو كانتا مرسومتين في القطعة الكبرى كما في شكل (١٣٩)

(البرهان) نصل BM ثم نقول

ان في كل حالة من الحالات الثلاث

$$\angle B = \angle B' = \angle B' \text{ المشتركة معها في القوس}$$

$$6 \quad \angle B = \angle B' = \angle B' \text{ » » » » }$$

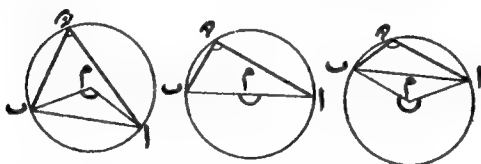
(نظرية ٦٦)

اذن $\angle B = \angle B' = \angle B'$ وهو المطلوب

(نتيجة) الزاوية المحيطية المرسومة في القطعة الصغرى من

الدائرة منفرجة والزاوية المرسومة في نصف الدائرة قائمة والزاوية

المرسومة في القطعة الكبرى حادة



(شكل ١٤٠) (شكل ١٤١) (شكل ١٤٢)

فمثلا $\angle B$ المرسومة في القطعة الصغرى (شكل ١٤٠) منفرجة

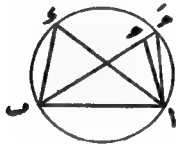
$\angle B$ المرسومة في نصف الدائرة (شكل ١٤١) قائمة

$\angle B$ المرسومة في القطعة الكبرى (شكل ١٤٢) حادة

« نظرية ٧٠ »

(وهي عكس نظرية ٦٩)

الزوايا المتساوية المرسومة على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها تكون في قطعة واحدة هذه القاعدة قاعدة لها



(شكل ١٤٤)



(شكل ١٤٣)

(المفروض) ان $\angle A > \angle B$ وانهما مرسومتان على قاعدة واحدة AB وفي جهة واحدة منها

(المطلوب اثباته) ان $\angle A < \angle B$ على محيط دائرة واحدة

بمعنى ان زاويتي A ح B على محيط دائرة واحدة قاعدتها AB

(البرهان) لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط A B C و D فان مر

بالنقطة ح ثبت المطلوب والا فاما ان يقطع المستقيم B ح بأن تكون

نقطة ح خارج الدائرة أولا يقطعه بأن تكون نقطة ح داخل الدائرة

فان قطع محيط الدائرة المستقيم B ح في نقطة مثل ح' كما في

(شكل ١٤٣) نصل A ح' ثم نقول

(نظرية ٦٩)

$$\angle A < \angle B'$$

بالفرض

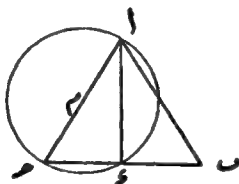
$$\angle A < \angle B$$

$$\text{اذن } \angle A < \angle B$$

ولكن $\angle \alpha > \angle \beta$ خارجة بالنسبة للزاوية α ح β الداخلة في المثلث α ح β فلا يتأتى تساويهما الا اذا وقعت نقطة ح' على ح وبذلك تقع α ح β ح' على محيط دائرة واحد وهو المطلوب وان لم يقطع محيط الدائرة المار بالنقط α ح β والمستقيم β ح كما في (شكل ١٤٤) عند β ح الى ان يقابل محيط الدائرة في ح' ثم نصل α ح' ونستمر في البرهان كالحالة الاولى

تمارين (٢٣)

(١) α ح β مثلث متساوي الساقين ($\alpha = \beta$) فاذا رسمت دائرة قطرها α ح وكانت تقطع القاعدة β ح في γ فبرهن على ان γ منتصف β ح



(شكل ١٤٥)

(البرهان) نصل α و δ ثم نقول
الزاوية المحيطية α و δ مرسومة في نصف دائرة وتساوي قائمة
(نتيجة نظرية ٦٩)

فيكون α و δ عموداً على β ح
ويكون β و γ ح (خاصة المثلث المتساوي الساقين)

اي ان نقطة و منتصف ب ح وهو المطلوب
(٢) ا ب ح و شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فاذا فرض
ان قطريه تقاطعا في نقطة ه فبرهن على ان المثلثين ب ح ه و ا ه
متساويا الزوايا

(٣) اذا رسم من نقطة ه المفروضة خارج دائرة القاطعان ه ا ب
ه و ح و بحيث ان القاطع الاول يقطع المحيط في نقطتي ا و ب
والقاطع الثاني يقطع المحيط في نقطتي ح و و فبرهن على ان المثلثين
ه ا و ه ب ح متساويا الزوايا

(٤) برهن على ان محيطي الدائرتين المرسومتين على ضلعين من
اضلاع المثلث باعتبارهما قطرين يتقاطعان في نقطة على الضلع الثالث
(٥) برهن على ان الدوائر الاربعة المرسومة على اضلاع المعين
الاربعة باعتبارها اقطاراً تتقاطع في نقطة واحدة

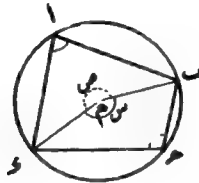
(٦) دائرتان متقاطعتان في نقطتي ا و ب فاذا رسم من ا القطر
ا ح في احدى الدائرتين والقطر ا و في الدائرة الثانية فبرهن على أن
ح ب على استقامة و

(٧) ا ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة فاذا فرض ان منتصف
زاوية رأسه ا يقابل القاعدة في و ومحيط الدائرة في ه فبرهن على
ان المثلثين ا ب و ا ه ح متساويا الزوايا

(٨) ا ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة فاذا رسم الارتفاع ا و
ليقابل القاعدة ب ح في و ورسم قطر الدائرة ا ه فبرهن على ان
المثلثين ا ب و ا ه ح متساويا الزوايا

« نظرية (٧) »

الزاويتان المتقابلتان في الشكل الرباعي المرسوم داخل الدائرة متكاملتان



(شكل ١٤٦)

(المفروض) ان $\angle A$ و $\angle C$ شكل رباعي مرسوم داخل الدائرة التي مركزها O

(المطلوب اثباته) ان $\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

(البرهان) نصل OB و OD ونقول ان

$\angle A = \frac{1}{2}$ نصف الزاوية المركزية من التي قوسها BC و

$\angle C = \frac{1}{2}$ نصف الزاوية المركزية من التي قوسها DA و

وبالجمع يكون

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\text{قوس } BC + \text{قوس } DA)$$

$$= \frac{1}{2} \times 360^\circ =$$

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

وكذلك نبرهن على ان

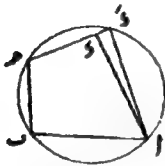
$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

وهو المطلوب

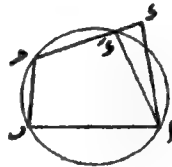
« نظرية ٧٢ »

(وهي عكس نظرية (٧١)

إذا كان في الشكل الرباعي زاويتان متقابلتان متكاملتان كانت
مماسه على محيط دائرة واحد



(شكل ١٤٨)



(شكل ١٤٧)

(المفروض) أن $\angle A$ و $\angle C$ شكل رباعي فيه الزاويتان $\angle B$ و
متكاملتان

(المطلوب اثباته) أن $\angle A$ و $\angle C$ مماس على محيط دائرة واحد
(البرهان) لذلك نرسم محيط دائرة يمر بالنقط A و B و C و D فان مر
بالنقطة E ثبت المطلوب والا فانه اما ان يقطع الضلع BC و بأن تكون
نقطة E خارج الدائرة أو لا يقطعه بأن تكون نقطة E داخل الدائرة
فان قطع محيط الدائرة المستقيم BC في نقطة مثل E كما في
(شكل ١٤٧) نصل AE و CE ثم نقول

$$\angle A + \angle C = \angle A' + \angle C' = 180^\circ \quad (\text{نظرية ٧١})$$

$$\text{ولكن } \angle A + \angle C = \angle A' + \angle C' = 180^\circ \quad \text{بالفرض}$$

$$\text{اذن } \angle A' = \angle A \quad \text{و} \quad \angle C' = \angle C$$

ولكن $\angle A' = \angle C'$ خارجة بالنسبة للزاوية $\angle A$ و $\angle C$ الداخلية في

المثلث $ا ب ج$ فلا يتأني تساويهما الا اذا وقعت نقطة $د$ على $ا ب$ وبذلك تقع $ا ب ج$ على محيط دائرة واحد وهو المطلوب

وان لم يقطع محيط الدائرة المار بالنقط $ا ب ج$ المستقيم $ح د$ كما في (شكل ١٤٨) عند $د$ الى أن يقابل محيط الدائرة في $د$ ثم نصل $ا د$ ونستمر في البرهان كما تقدم

تمارين (٢٤)

(١) $ا ب ج د$ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فاذا مد ضلعه $ا ب$ الى $هـ$ فبرهن على ان $د هـ ب ح$ الخارجة تساوى $ا د ح$ الداخلة

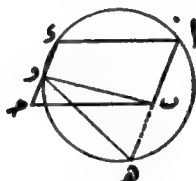
(٢) اذا امكن رسم متوازي الاضلاع داخل دائرة كان متوازي الاضلاع هذا مستطيلا

(٣) اذا امكن رسم شبه المنحرف داخل دائرة كان شبه المنحرف هذا متساوى الساقين

(٤) $ا ب ج د$ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فاذا مد $ا ب$ $هـ د$ الى ان يتلاقيا في نقطة $هـ$ فبرهن على ان المثلثين $ا د هـ$ $ب ح هـ$ متساويا الزوايا

(٥) $ا ب ج د$ و $ا ب ح د$ الارتفاعان النازلان من $ب د$ $ح د$ في المثلث $ا ب ج$ فاذا فرض ان $م$ ملتقى الارتفاعين فبرهن على ان النقط الاربعة $ا ب ج د م$ على محيط دائرة واحد .

(٦) ا ب ح و متوازي اضلاع فاذا رسمت دائرة تمر بنقطتي ٦ ا و وتقطع و ح في و وامتداد ا ب في هـ (شكل ١٤٩) فبرهن على ان النقط الاربع ب ٦ ح ٦ هـ و على محيط دائرة واحد



(شکل ۱۴۹)

(البرهان) ١ هـ و ٢ شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

فكون $v_2 = s_1 + s_2$

ولكن $v_2 = s_2 + c_2$ (نظرية ٢٨)

اذن $\angle = \angle$ ح

ای ان $\Delta \mu = \Delta \mu_0$

وينتج من ذلك ان النقط الرابع ب 6 ح 6 هـ و على محيط دائرة واحد (نظرية ٧٠) وهو المطلوب

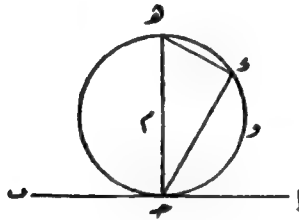
(٧) اثبت المسألة السابقة في حالة ما يقطع محيط الدائرة امتداد

کل من اب و ح

(۸) ا ب ح مثلث متساوی الساقین فاذا رسم المستقیم من ص یوازی قاعدته ب ح وقطع ساقیه فی س ۶ ص فبرهن علی ان النقط الاربع ب ۶ ح ۶ س ۶ ص علی محیط دائرة واحد

« نظرية ٧٣ »

الزاوية التي رأسها على محيط الدائرة وأحد ضلعها وتر والثاني مماس للدائرة تساوي الزاوية المحيطية المرسومة في القطعة المتبادلة



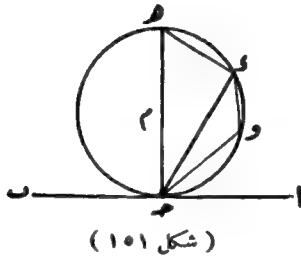
(شكل ١٥٠)

(المفروض) ان $\angle ح$ زاوية رأسها على محيط الدائرة وضلعها $ح$ وتر مرسوم فيها وضلعها $ا$ ممسها في $ح$
(المطلوب اثباته)

ان $\angle ا ح ز =$ الزاوية المرسومة في القطعة $ح هـ و$
وان $\angle ب ح ز =$ الزاوية المرسومة في القطعة $ح و و$
(البرهان) أولا - لذلك نرسم القطر $ح م هـ$ ونصل $هـ و$
فتكون $\angle هـ و ح$ قائمة (نظرية ٦٩)
وتكون $\angle ز هـ و ح + \angle ا ح ز =$ قائمة
ولكن $\angle ا ح ز =$ قائمة (نظرية ٦٠)
اي ان $\angle ا ح ز + \angle ز هـ و ح =$ قائمة

اذن $\angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح}$
 وبطرح $\angle \text{ح و د}$ المشتركة
 يكون $\angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د}$ المرسومة في القطعة ح و د
 وهو المطلوب

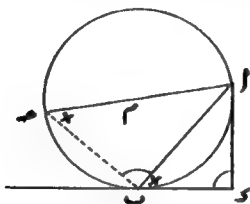
ثانياً — نرسم القطر ح م ونفرض نقطة و على قوس القطعة
 التي ليست فيها ه ثم نصل ه و و د و ح (شكل ١٥١)



فن حيث ان ح و د وشكل رباعي مرسوم داخل دائرة
 تكون $\angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح}$ (نظرية ٧١)
 ولكن $\angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح}$ (نظرية ١)
 اذن $\angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د} + \angle \text{د و ح}$
 ولكن $\angle \text{ح و د} = \angle \text{ح و د}$ على حسب ما تقدم في
 الجزء الاول من هذه النظرية
 اذن $\angle \text{د و ح} = \angle \text{ح و د}$ المرسومة في القطعة ح و د
 وهو المطلوب

تمارين (٢٥)

(١) ا ب وتر في دائرة ا ح قطر لها فاذا رسم ا د عموداً على ب د الذي يمس الدائرة في ب فبرهن على ان ا ب ينصف د و ا ح



(شكل ١٥٢)

(البرهان) $\angle ADB = \angle BDC$ قائمة بالعمل

٦ $\angle ADB = \angle BDC$ قائمة

(نظرية ٦٩)

ففي المثلثين ا د ب و ب د ح

تكون $\angle ADB = \angle BDC$ لان كلا منهما تساوي قائمة

٦ $\angle ADB = \angle BDC$ (نظرية ٧٣)

اذن $\angle ADB = \angle BDC$

أى ان ا ب ينصف د و ا ح وهو المطلوب

(٢) دائرتان متماستان في نقطة ا فاذا رسم مستقيمان يمران بها

ويقطعان محيط احدى الدائرتين في ب ٦ ح والاخرى في د ٦ هـ

فبرهن على ان ب ح يوازي د هـ

(٣) دائرتان متقاطعتان في نقطتي م ٦ ص فاذا فرضت نقطة ا

على محيط احدى الدائرتين ووصل ا س ومد على استقامته الى أن قابل محيط الدائرة الثانية في ب ووصل كذلك ا ص ومد على استقامته الى أن قابل محيط الدائرة الثانية في ح فبرهن على ان ب ح يوازي المستقيم الذى يمر بمحيط الدائرة الاولى في نقطة ا

(٤) ا ب ح د شكل رباعى مرسوم داخل دائرة فاذا فرض ان قطريه يتقاطعان في نقطة ه فبرهن على ان المستقيم الذى يمر بمحيط الدائرة التى تمر بالثلاث النقط ا ب 6 ه فى نقطة ه يوازي ح د

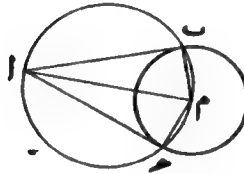
(٥) اذا رسمنا مماساً لدائرة ووترأ فيها ماراً بنقطة التماس وانزلنا عمودين من منتصف احدى قوسى الدائرة على المماس والوتر فبرهن على ان هذين العمودين متساويان

الباب الخامس

في العمليات

« عملية ١٢ »

المطلوب رسم مماس لدائرة من نقطة خارجها



(شكل ١٥٣)

(المفروض) ان نقطة ا خارج الدائرة التي مركزها م

(المطلوب عمله) رسم مماس من ا للمحيط

(العمل) نصل ا م ونرسم الدائرة التي قطرها ا م فهذه الدائرة

تقطع الدائرة المفروضة في تقطعي ب ح

فاذا وصلنا من ا الى ب ح كان كل من ا ب ح مماساً للدائرة

(البرهان) من حيث ان كلا من الزاويتين ا ب ح ا م ح

مرسومة في نصف دائرة تكون كل منهما قائمة (نظرية ٦٩)

ويكون ا ب عموداً على نصف القطر م ب ح عموداً على

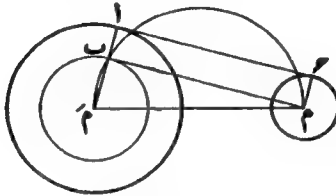
نصف القطر م ح

اي ان ا ب ح مماسان للدائرة في ب ح (نظرية ٦١)

وهو المطلوب

« عملية ١٣ »

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين من الخارج



(شكل ١٥٤)

(المفروض) دائرتان مختلفتان متباعدتان من الخارج وان M' مركز الدائرة الصغرى و M مركز الدائرة الكبرى

(المطلوب عمله) رسم مماس مشترك لهاتين الدائرتين من الخارج

(العمل) نركز في M' وننصف قطر يساوى الفرق بين نصفى

قطرى الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نرسم من M مماساً لها وليكن

M ب (عملية ١٢)

ونصل M' ب ونمده على استقامته الى ان يقابل محيط الدائرة M'

المعلومة في A ثم نرسم من M نصف القطر M ح موازياً $M'A$ وفى اتجاهه

ونصل ح A

فيكون ح A هو المماس المشترك المطلوب

(البرهان) من حيث ان M ح يوازى ويساوى $M'A$ بالعمل

يكون الشكل $M'A$ ح متوازى اضلاع (نظرية ٤٣)

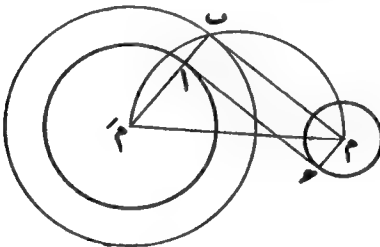
ومن حيث ان المماس M ب عمود على نصف القطر M' ب يكون

الشكل ١ ب م ح مستطيلاً ويكون ح ا عموداً على نصفى القطرين
١' ٢' ٦

اى ان ح ا مماس لكل من الدائرتين المعلومتين وهو المطلوب
(ملاحظة) من حيث أنه يمكن رسم مماس ثان غير م ب للدارة
التي نصف قطرها يساوى الفرق بين نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين
فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماس مشترك ثان للدائرتين المعلومتين
من الخارج

د عمية ١٤

المطلوب رسم مماس مشترك لدائرتين معلومتين من الداخل



(شكل ١٥٥)

(المفروض) دائرتان مختلفتان متباعدتان من الخارج وان م
مركز الدائرة الصغرى م٦ مركز الدائرة الكبرى
(المطلوب عمله) رسم مماس مشترك لهاتين الدائرتين من الداخل
(العمل) نركز في م و بنصف قطر يساوى مجموع نصفى قطرى

الدائرتين المعلومتين نرسم دائرة ثم نرسم من $م$ مماساً لها وليكن $ب$ (عملية ١٢)

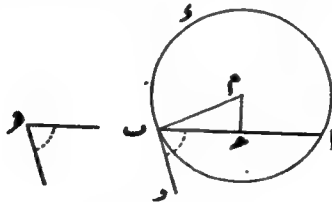
ونصل $م$ ب فيقطع محيط الدائرة $م'$ المعلوم في $ا$ ثم نرسم من $م$ نصف القطر $م ح$ موازياً $م' ا$ وفي اتجاه مضاد لاتجاهه ونصل $ح ا$ فيكون $ح ا$ هو المماس المشترك المطلوب

(البرهان) نستمر في البرهنة على صحة هذه العملية بالطريقة المتقدمة في اثبات صحة العملية السابقة

(ملاحظة) من حيث أنه يمكن رسم مماس ثان غير $م ب$ للدائرة التي نصف قطرها يساوى مجموع نصفى قطرى الدائرتين المعلومتين فبالطريقة المتقدمة يمكن رسم مماساً مشتركاً ثانياً للدائرتين المعلومتين من الداخل

« عملية ١٥ »

المطلوب رسم قطعة دائرة على مستقيم معلوم تقبل زاوية معلومة



(شكل ١٥٦)

(المفروض) ان $ا ب$ مستقيم معلوم وان $هـ$ هي الزاوية المعلوم (المطلوب عمله) رسم قطعة دائرة على $ا ب$ تقبل زاوية تساوى $هـ$

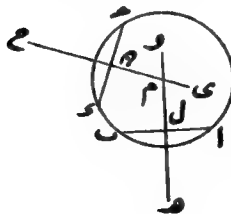
(العمل) نرسم من ب المستقيم ب و يصنع زاوية مع المستقيم ب تساوى $\angle ه$ ونقيم من ب العمود ب م على ب و ثم ننصف ا ب في ح ونقيم منها العمود ح م على ا ب ونعده حتى يقابل ب م في م فاذا ركزنا في م ورسمنا دائرة بنصف قطر يساوى م ب فانها تمر بنقطة ا [لان $ا م = م ب$ (مثال ٣ من المحال الهندسية)] وتكون ا ب هي القطعة المطلوبة

(البرهان) من حيث ان ب و عمود على نصف القطر م ب يكون ب و مماسا للدائرة في نقطة ب
(نظرية ٦١)
وعلى ذلك فاي زاوية مرسومة في القطعة ا ب تساوى زاوية ب و ا
(نظرية ٧٣)

ولكن $\angle ب و ا = \angle ه$ المعلومة
اذن القطعة ا ب تقبل الزاوية المعلومة وهو المطلوب

« عملية ١٦ »

المطلوب إيجاد مركز دائرة غير معلوم مركزها



(شكل ١٥٧)

(المفروض) دائرة غير معلوم مركزها

(المطلوب عمله) إيجاد هذا المركز

(العمل) نرسم وترين في الدائرة أياً كانا مثل AB و CD ثم

ننصف AB في L ونقيم HL وعموداً على AB وكذلك ننصف CD

في E ونقيم CE عموداً على CD

فن حيث ان AB ليس على استقامة CD يتقاطع العمودان في

نقطة M وتكون هي مركز الدائرة المطلوب

(البرهان) من حيث ان مركز الدائرة على بعدين متساويين من

نقطتي A و B يجب ان يكون هذا المركز احدى نقط العمود HL و

(المثال ٣ من المحال الهندسية)

ومن حيث ان مركز الدائرة على بعدين متساويين من نقطتي

CD و E يجب ان يكون هذا المركز كذلك احدى نقط العمود CE

ومن حيث ان نقطة M (نقطة تقاطع العمودين) هي النقطة المفردة

المشتركة بين العمودين HL و CE

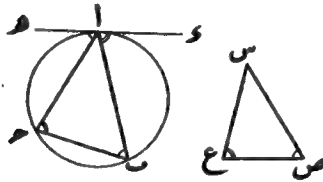
وهو المطلوب

تكون M مركزها

« عملية ١٧ » .

المطلوب رسم مثلث داخل دائرة معلومة وزواياه تساوى زوايا

مثلث آخر معلوم



(شكل ١٥٨)

(المفروض) ان ABC ح الدائرة المعلومة وان DEF ح المثلث

المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مثلث داخل الدائرة زواياه تساوى زوايا

المثلث DEF ح

(العمل) نقرض نقطة ما مثل A على محيط الدائرة ونرسم المماس

DE ح ثم نرسم من نقطة A الوتر AB بحيث يصنع مع المماس DE

الزاوية $BAC = \angle E$

ونرسم من نقطة A الوتر AC بحيث يصنع مع المماس DE الزاوية

$CAD = \angle F$ ح

ثم نصل B ح فيكون ABC ح المثلث المطلوب

(البرهان) $\angle BAC = \angle CAD = \angle E$ (نظرية ٧٣)

ولكن $\angle BAC = \angle CAD = \angle E$ (بالعمل)

اذن $\angle BAC = \angle CAD = \angle E$

وكذلك $\angle ABC = \angle ACB = \angle F$ (نظرية ٧٣)

ولكن $\angle ABC = \angle ACB = \angle F$ (بالعمل)

اذن $\angle ABC = \angle ACB = \angle F$

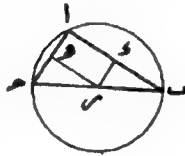
وتكون الزاوية الثالثة $\angle \alpha = \angle \beta$ وبذلك تكون زوايا المثلث α β γ المرسوم داخل الدائرة تساوي زوايا المثلث من ص ع وهو المطلوب

« عملية ١٨ »

المطلوب رسم دائرة خارج مثلث معلوم



(شكل ١٦١)



(شكل ١٦٠)



(شكل ١٥٩)

(المفروض) ان α β γ مثلث

(المطلوب عمله) رسم دائرة خارج هذا المثلث

(العمل) نأخذ الضلع $\alpha\beta$ في نقطة δ ونقيم $\delta\alpha$ عموداً على

$\alpha\beta$ ثم نأخذ الضلع $\alpha\gamma$ في ϵ ونقيم $\epsilon\alpha$ عموداً على $\alpha\gamma$ فيقتابل العمودان في σ

فتكون σ مركز الدائرة المطلوب رسمها خارج المثلث

(البرهان) من حيث ان نقطة σ على بعدين متساويين من

α β وكذلك على بعدين متساويين من α γ δ على حسب ما جاء

في المثال الثالث من المحال الهندسية

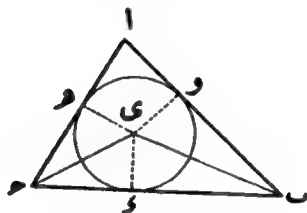
تكون نقطة σ على ابعاد متساوية من α β γ فاذا ركز في

σ ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوي $\sigma\alpha$ فانه يمر بـ β و γ
 المثلث الثلاث

وتكون الدائرة $ا ب ح$ مرسومة خارج المثلث وهو المطلوب
 (ملاحظة) نرى انه اذا كان المثلث حاد الزوايا كما في شكل
 (١٥٩) فان مركز الدائرة يقع داخله واذا كان قائم الزاوية كما في شكل
 (١٦٠) يقع المركز على وتر المثلث واذا كان منفرج الزاوية كما في
 شكل (١٦١) يقع المركز خارجاً عنه

« عملية ١٩ »

المطلوب رسم دائرة داخل مثلث معلوم



(شكل ١٦٢)

(المفروض) ان $ا ب ح$ مثلث
 (المطلوب عمله) رسم دائرة داخل هذا المثلث
 (العمل) ن نصف كلا من $ا ب ح$ و $ب ح$ و $ا ح$ بالمستقيمين
 $ب ي$ و $ا ح ي$ المتلاقين في نقطة $ي$
 فتكون $ي$ مركز الدائرة المطلوب رسمها داخل المثلث
 (البرهان) نزل من $ي$ الاعمدة الثلاثة $ي د$ و $ي هـ$ و $ي و$
 على اضلاع المثلث فن حيث ان نقطة $ي$ على بعدين متساويين عن

ب ا ح وكذلك على بعدين متساويين عن ح ا ح ا ح ب على حسب ما جاء في المثال الرابع من المحال الهندسية

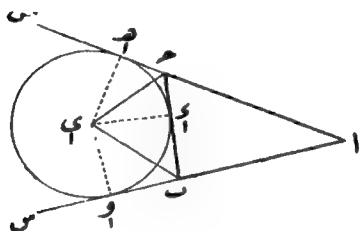
يكون $ي = و = هـ$ و

فاذا ركز في ي ورسم محيط دائرة بنصف قطر يساوي ي و فانه يمر بالنقط و هـ و ويكون مماسا للاضلاع ب ح و ا ح ا ب (نظرية ٦١)

وتكون الدائرة و هـ و مرسومة داخل المثلث وهو المطلوب

« عملة ٢٠ »

المطلوب رسم دائرة تمس المثلث من الخارج



(شكل ١٦٣)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث

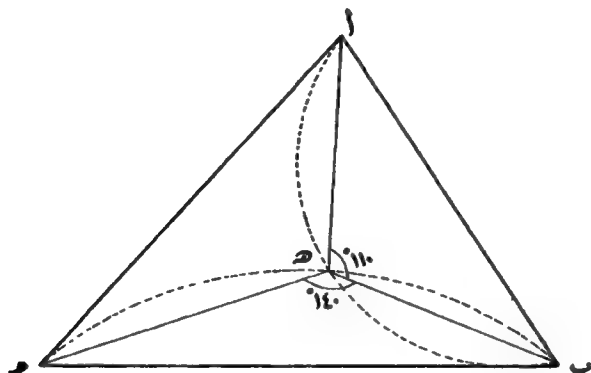
(المطلوب عمله) رسم دائرة تمس ب ح و امتداد الضلعين ا ب

ا ح

(العمل) ننصف الزاويتين ح ب س و ب ح ص بالمستقيمين

ب ي و ح ي المتلاقين في نقطة ي فتكون ي مركز الدائرة المطلوبة

(٥)



(شكل ١٦٤)

كل من القطعتين تكون $\angle ا د ب = ١١٠^\circ$ $\angle ا د ج = ١٤٠^\circ$
اذن د هي النقطة المطلوبة

(٢) المطلوب رسم مثلث خارج دائرة معلومة وزواياه تساوي
زوايا مثلث آخر معلوم

(٣) اذا رسمنا مماسين مشتركين لدائرتين فجزأهما المحصوران
بين نقطتي التماس متساويان سواء كان المماسان خارجيين أو داخليين
(٤) اذا رسمنا مماسين خارجيين ومماسين داخليين لدائرتين متباعدتين
فالدائرتان يتقاطعان في نقطة على خط المراكز وكذلك الخارجتان
اذا امتدا

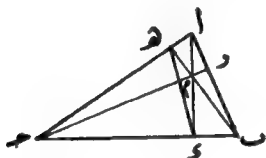
(٥) دائرتان متماستان من الخارج في نقطة ا رسم مماس مشترك
يمسهما في نقطتي ح و د و برهن على ان $\angle ا ح د$ قائمة

(٦) اذا ساوت قاعدة مثلث وزاوية رأسه نظيرتيهما من

- مثلث آخر كانت الدائرتان المرسومتان خارج المثلثين متساويتين
 (٧) مجموع قطري الدائرتين المرسومة احدهما داخل مثلث قائم الزاوية والاخرى خارجه يساوى مجموع ضلعي القائمة
 (٨) اذا كانت الدوائر المرسومة داخل المثلث ABC تماس اضلاعه في D و E و F فان زوايا المثلث D و E و F تساوى على الترتيب
 $90^\circ - \frac{1}{3} \angle A - \frac{1}{3} \angle B - \frac{1}{3} \angle C$
 (٩) اذا فرضنا ان O مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC و G مركز الدائرة المماسية للضلع BC وامتداد الضلعين الآخرين فانه يمكن أن يمر بالنقط O و G و A محيط دائرة
 (١٠) المطلوب رسم مثلث على قاعدة معلومة رأسه على مستقيم معلوم وزاوية رأسه تساوى زاوية معلومة
 (١١) المطلوب رسم المثلث اذا علمت منه القاعدة وزاوية الرأس وضلع غير القاعدة
 (١٢) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه الارتفاع والقاعدة وزاوية الرأس
 (١٣) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس ومجموع الضلعين الآخرين
 (١٤) المطلوب رسم المثلث اذا علم منه القاعدة وزاوية الرأس والفرق بين الضلعين الآخرين
 (١٥) المطلوب رسم دائرة تماس مستقيمين متوازيين ومستقيما آخر قاطعا لهما مع بيان انه يمكن رسم دائرتين متساويتين في هذه الحالة

تمارين عامة

(١) برهن على أن الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث على الاضلاع المقابلة لها تتلاقى في نقطة واحدة



(شكل ١٦٥)

(المفروض) المثلث ABC وان AD و BE و CF هي الاعمدة النازلة من A و B و C على الاضلاع BC و AC و AB (المطلوب اثباته) ان هذه الارتفاعات تتلاقى في نقطة واحدة (البرهان) نفرض ان الارتفاعين AD و BE يتلاقيا في M ثم يوصل CM ويمد على استقامة حتى يقابل AB في H ونبرهن على أن H و عمود على AB

لذلك نصل D و H ثم نقول

من حيث ان كلا من الزاويتين ADH و BDH قائمة تكون النقط M و D و B و H على محيط دائرة واحد

(نظرية ٧٢)

وتكون $\angle M = \angle D = \angle B$ و H و D و B و M على محيط دائرة واحد

(نظرية ٦٩)

$\angle M = \angle D = \angle B$ و بالتقابل في الرأس

ومن حيث ان $\angle ADH = \angle BDH$ بالقيام

تكون النقط ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ على محيط دائرة واحد

(نظريه ۷۲)

وتكون $\Delta \omega = \Delta \omega_1 = \Delta \omega_2$ (نظرية ٦٩)

أى ان $\Delta 100 + \Delta 100 = \Delta 200$ و $\Delta 100 + \Delta 100$

2 =

وتكون $\alpha > 1$ وم الثالثة $= u$

أَيُّ أَنْ حَوْوِ عَمُودِ عَلِيٍّ

والاعمدة ا و ب ج د ح و اذن تتلاقى في النقطة م

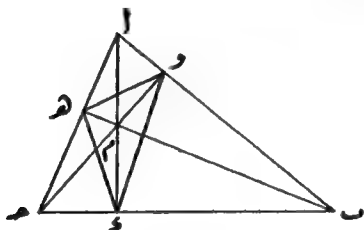
وهو المطلوب

(تعريف ١) نقطة تلاقي الاعمدة النازلة من رموس المثلث

على اضلاعه تسمى ملتقى الارتقاعات

(تعريف ٢) المثلث الحادث من وصل مواقع الارتفاعات

يسمى مثلث المواقع



(شکل ۱۶۶)

فمثلا في المثلث ا ب ح (شكل ١٦٦) اذا أنزلنا الاعمدة ا و

بھ ہر حء من الروس المقاتلة لها ووصلنا ہ ہ ہ ہ ہ ہ ہ

كانت نقطة مملتقى الارتفاعات وكان المثلث و هـ و مثلث المواقع

(٢) برهن على أن الاعمدة النازلة من رؤوس المثلث الحاد

الزوايا على الاضلاع المقابلة لها تنصف زوايا مثلث المواقع
(٣) برهن على أن كل ضلعين من مثلث المواقع متلاقين على
ضلع من المثلث الاصلى يصنعان مع هذا الضلع زاويتين متساويتين
(٤) برهن في شكل (١٦٦) على أن المثلثات $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$

$\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متساوية الزوايا

(٥) M ملتقى الارتفاعات في المثلث $\triangle ABC$ مددنا العمود AM
حتى قابل الدائرة المرسومة خارج المثلث في C برهن على أن M و
 C =

(٦) كل من الدوائر الثلاث التي تمر برؤس مثلث وملتقى ارتفاعاته
تساوي الدائرة الخارجة المارة برؤسه

(٧) $\triangle ABC$ مثلث متساوي الاضلاع مرسوم داخل دائرة فرضت
نقطة D على القوس الصغرى BC فاذا وصلت الاوتار AD و
 BD و CD فبرهن على ان $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA$

(٨) دائرة مركزها M رسم فيها الوتر AB ثم رسم القطر CD
عموداً على AB فاذا فرضت نقطة مثل E على هذا القطر ووصلت E
الى A و B و C و D فبرهن على ان النقط A, E, B, C و D
على محيط دائرة واحد

(٩) المطلوب رسم المثلث القائم الزاوية اذا علم منه نصف قطر
دائرته الداخلة واحدى زاويتي الحادتين

(١٠) اذا فرضت نقطة مثل D داخل دائرة ورسم منها وتران
متعامدان AD و BD و C و E فبرهن على أن القوس AC + القوس
 BD = القوس AB + القوس CD

(١١) المطلوب رسم المثلث المتساوي الساقين اذا علم منه نصف

قطر دائرته الداخلة والقاعدة

(١٢) $ا ب ح$ مثلث متساوي الساقين ($ا ب = ا ح$) ركن في نقطة $م$ على امتداد الضلع $ا ح$ ورسمت دائرة تماس الضلع $ا ب$ في $ب$ فاذا مد $ب ح$ الى أن قابل المحيط في $و$ فبرهن على أن $م و$ عمود على $ا ح$

(١٣) اذا فرض ان $م$ مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث $ا ب ح$ ورسم الارتفاع $ا و$ فبرهن على أن $ا ب \perp ا و = ا ح \perp ا م$

(١٤) المطلوب إيجاد نقطة مثل $و$ داخل المثلث $ا ب ح$ بحيث ان $ا و \perp ب و = ب ح \perp ح و = ح و \perp ا و$

(١٥) $ا ب ح$ مثلث فاذا نصفت الاضلاع $ب ح$ $ح و$ $و ا$ في $س$ $ص$ $ع$ ورسم الارتفاع $ا و$ فبرهن على ان النقط $س$ $ص$ $ع$ $و$ على محيط دائرة واحد

(١٦) برهن على ان محيط الدائرة المارة بمتصفات اضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته

(١٧) $ا ب ح$ مثلث نصفت اضلاعه $ب ح$ $ح و$ $و ا$ في $س$ $ص$ $ع$ فاذا فرض ان $م$ ملتقى ارتفاعاته ونصف البعد $ا م$ في $ح$ فبرهن على أن النقط $س$ $ص$ $ع$ $و$ على محيط دائرة واحد

(١٨) برهن على أن محيط الدائرة المارة بمتصفات اضلاع المثلث يمر بمتصفات الابعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات وروعوس المثلث

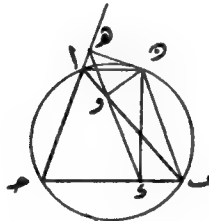
(١٩) برهن على ان محيط الدائرة المارة بمتصفات اضلاع المثلث يمر بمواقع ارتفاعاته وبمتصفات الابعاد المحصورة بين ملتقى الارتفاعات وروعوس المثلث

(ملاحظة) بناء على هذه الخاصة تسمى الدائرة المارة بمتصفات

اضلاع المثلث بدائرة « النقط التسع »

(٢٠) ا ب ح مثلث ونقطة م ملتقى الارتفاعين ا د ب ه فاذا
فرض ان م مركز الدائرة المرسومة خارج المثلث ا ب ح ووصل
ح م الى ان قابل محيط الدائرة في ه فبرهن على أن ه م
ينصف ا ب

(٢١) ه نقطة ما فرضت على محيط الدائرة المرسومة خارج
المثلث ا ب ح فاذا انزل منها الاعمدة ه د ه ه ه و على
الاضلاع ب ح ح ا ا ب فبرهن على أن د ه ه و على
استقامة واحدة



(شكل ١٦٧)

(البرهان) لذلك نصل ه و د و د ا د ا د ب ه ب ثم نقول
من حيث ان كلا من الزاويتين ه و ا د ه ا قائمة
تكون النقط ه و د ا د ه على محيط دائرة واحدة
وتكون $\angle ه د ه = \angle ا د ه$ (نظرية ٦٩)
ولكن $\angle ا د ه + \angle ا د ب = ١٨٠^\circ$ (نظرية ١)
اذن $\angle ه د ه + \angle ا د ب = ١٨٠^\circ$
ولكن $\angle ا د ب + \angle ا د ه = ١٨٠^\circ$ (نظرية ٧١)
اذن $\angle ه د ه = \angle ا د ب$
 $\angle ه د ه =$

ومن حيث ان كلا من الزاويتين $\angle \text{و ب ح}$ و $\angle \text{و ب د}$ قائمة
تكون النقط د و ح و ب على محيط دائرة واحد
وتكون $\angle \text{د ب و} + \angle \text{د و ب} = 180^\circ$
اذن $\angle \text{د و ب} + \angle \text{د و ب} = 180^\circ$
ويكون و د على استقامة و ه (نظرية ٢)
وهو المطلوب

(ملاحظة) المستقيم و ه معروف « بنقط سسون »
(٢٢) دائرتان متماستان داخلا في نقطة ا رسم الوتر ب ح في
الدائرة الكبرى كي يمس الصغرى في د والمطلوب البرهنة على ان ا د
ينصف $\angle \text{ب ا ح}$

(٢٣) اذا فرضت نقطة مثل د على محيط دائرة ورسم منها الوتر ا د
ثم رسم د ب يمس الدائرة في ه ورسم المستقيم ب ح د يوازي ا د
ويقطع الدائرة في ح و فبرهن على أن المثلثين د ب ح و ا ح د
متساويا الزوايا

(٢٤) ا ب زاوية فرضت على ضلعيها ا ب و ا ح النقطتان
 ح و فاذا رسم محيط دائرة يمر بالنقط ا ب و ا ح ورسم محيط دائرة
ثان يمر بالنقط ب و ح وتقاطع المحيطان في نقطة د فبرهن على
ان المثلثين ا د ب و ا د ح متساويا الزوايا

(٢٥) دائرتان متقاطعتان في نقطتي ا ب الاولى مركزها م
والثانية مركزها م' فاذا فرضت نقطة د على محيط الدائرة التي مركزها
 م ووصل د ا و د ب الى ان قطعاً محيط الدائرة الثانية في نقطتي
 س و فبرهن على ان س ص عمود على د م

القسم الثاني

المساحات

الباب الأول

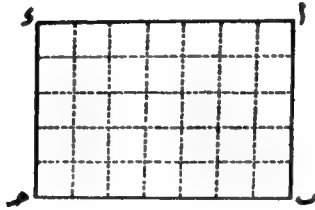
في مساحة الأشكال الرباعية والمثلث

تعاريف

- ١ — مساحة الشكل هي مقدار ما تحيط به اضلاعه من السطح
- ٢ — ارتفاع متوازي الاضلاع هو البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والضلع المقابل له
- ٣ — ارتفاع المثلث هو البعد بين أحد اضلاعه المعتبر قاعدة والرأس المقابل له
- ٤ — يقال ان الشكلين متكافئان متى كانت مساحة أحدهما تساوى مساحة الآخر

« نظرية ٧٤ »

مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب عدد الوحدات الدالة على طول قاعدته في عدد الوحدات الدالة على طول ارتفاعه



(شكل ١٦٨)

(المفروض) ان $ا ب ح د$ مستطيل قاعدته $ب ح$ وارتفاعه $ا ح$

(المطلوب اثباته) ان مساحة $ا ب ح د = ب ح \times ا ح$

(البرهان) نقرض ان طول الضلع $ب ح = ٧$ سنتيمترات

وطول الضلع $ا ح = ٥$ سنتيمترات ثم نقسم الضلع $ب ح$ الى ٧ أقسام متساوية ونقسم الضلع $ا ح$ الى ٥ أقسام متساوية ونرسم من نقط تقسم كل منهما مستقيمتين توازي الآخر

فبذلك ينقسم المستطيل الى أشكال صغيرة كل منها يساوي سنتيمتراً مربعاً واحداً

ومن حيث ان الشكل يحتوى على خمسة صفوف كل منها يحتوى على ٧ أشكال

يكون عدد ما يحتوى عليه المستطيل من السنتيمترات المربعة هو ٧×٥ أو ٣٥ سنتيمتراً مربعاً

« نظرية ٧٥ »

مساحة متوازي الاضلاع تساوي مساحة المستطيل المتحد معه في القاعدة والارتفاع



(شكل ١٦٩)

(المفروض) ان $AB \parallel CD$ و $AD \parallel BC$ وان AC اضلاع
مستطيل متحد معه في القاعدة BC والارتفاع h بمعنى ان
 $BC \parallel AD$

(المطلوب اثباته) ان $AB \parallel CD$ و يكافئ $AD \parallel BC$

(البرهان) في المثلثين ABC و DCB يقال

$$\left. \begin{array}{l} (نظرية ٤٠) \quad AB = DC \\ (نظرية ٤٠) \quad BC = AD \\ (نظرية ٣٠) \quad \angle ABC = \angle DCB \end{array} \right\} \text{من حيث ان}$$

يتساوى المثلثان ABC و DCB و $AD \parallel BC$ من عامة الوجوه

(نظرية ٤)

وعليه فاذا اضفنا الى الشكل الرباعي $ABCD$ و المثلث ABC

كان الناتج متوازي الاضلاع $ABCD$

واذا اضفنا الى الشكل الرباعي $ABCD$ و المثلث ADC كان

الناتج المستطيل $ABCD$

ويكون هذان الناتجان متساويين في المساحة

أى ان متوازي الاضلاع $ABCD$ و يكافئ المستطيل $ABCD$

نتيجة ١ — مساحة متوازي الاضلاع تساوى حاصل ضرب

قاعدته في ارتفاعه

(البرهان) تقدم في نظرية ٧٥

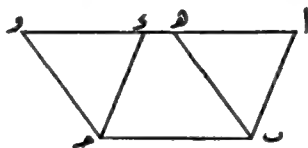
ان مساحة متوازي الاضلاع ا ب ح و = مساحة المستطيل ه ب ح و

$$= ب ح \times ه ب$$

= القاعدة في الارتفاع

وهو المطلوب

نتيجة ٢ - متوازي الاضلاع المتحدان في القاعدة والمحصوران
بين مستقيمين متوازيين متكافئان

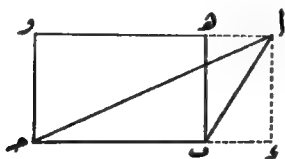


(شكل ١٧٠)

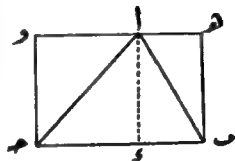
(البرهان) لان كلا من متوازي الاضلاع ا ب ح و و ه ب ح و
يكافئ مستطيلا واحداً

د نظرية ٧٦

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته في الارتفاع



(شكل ١٧٢)



(شكل ١٧١)

(الفروض) ان $ا ب ح$ مثلث قاعدته $ب ح$ وارتفاعه $ا د$
 (المطلوب اثباته) ان مساحة المثلث $ا ب ح = \frac{1}{2} ب ح \times ا د$
 (البرهان) نرسم في كل من شكلي (١٧١ ٦ ١٧٢) $ب ه$
 $ه ح$ وعمودين على $ب ح$ ثم نرسم $ا و$ موازياً $ب ح$ ونعده في
 شكل ١٧١ حتى يقابل $ب ه$ في $ه ح$ وفي $و$ ونقول
 المثلث $ا ب و =$ نصف المستطيل $ا د ب ه$
 والمثلث $ا د ح =$ نصف المستطيل $ا د ب ه$
 وبجمع المثلث الاول على الثاني في شكل ١٧١ وطرحه منه في
 شكل ١٧٢ ينتج أن

المثلث $ا ب ح =$ نصف المستطيل $ه ب ح و$

$$\frac{1}{2} ب ح \times ا د =$$

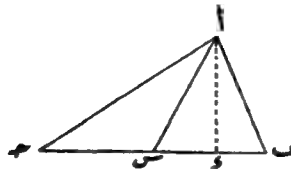
وهو المطلوب

$$\frac{1}{2} ب ح \times ا د =$$

(نتيجة) مساحة المثلث تساوي نصف مساحة متوازي الاضلاع
 المتحد معه في القاعدة والارتفاع

تمارين (٢٧)

(١) برهن على أن المستقيم المتوسط للمثلث يقسمه الى مثلثين
 متكافئين



(شكل ١٧٣)

(المفروض) ان AB ح مثلث وان S منتصف القاعدة BC

(المطلوب اثباته) ان $\triangle ABS$ يكافئ $\triangle ACS$ ح

(البرهان) نرسم الارتفاع AD

فتكون مساحة $\triangle ABS = \frac{1}{2} BS \times AD$

(نظرية ٧٦)

6 مساحة $\triangle ACS = \frac{1}{2} CS \times AD$

(نظرية ٧٦)

ولكن $BS = CS$ بالعمل

اذن $\frac{1}{2} BS \times AD = \frac{1}{2} CS \times AD$

اي ان $\triangle ABS$ يكافئ $\triangle ACS$ ح وهو المطلوب

(٢) برهن على أن مساحة المعين تساوى نصف حاصل ضرب

قطريه

(٣) AB ح و متوازي اضلاع نصف ضلعا AB و AD في

S ح برهن على أن مساحة $\triangle ABS = \frac{1}{2} AC \times BD$ مساحة متوازي

الاضلاع AB ح و

(٤) AB ح مثلث فرضت نقطة D على قاعدته BC بحيث كان

$BD = \frac{1}{2} BC$ ح برهن على أن مساحة $\triangle ABD = \frac{1}{2}$ مساحة

$\triangle ABC$

(٥) ارسم ثلاثة مستقيمت من رأس المثلث قسمه الى أربعة

مثلثات متكافئة

(٦) AB ح مثلث فرضت نقطة D على قاعدته BC بحيث

كان $BD = \frac{2}{3} BC$ ح برهن على أن مساحة $\triangle ABD = \frac{2}{3}$ مساحة

مساحة $\triangle ABC$

(٧) برهن على أن قطري متوازي الاضلاع يقسمانه الى أربعة مثلثات متكافئة

(٨) AB ح مثلث والنقطة E منتصف قاعدته BC فاذا فرضت نقطة M مثل E على المستقيم المتوسط AE فبرهن على أن $\triangle ABE \cong \triangle MBE$ يكافئ $\triangle ABE \cong \triangle MBE$

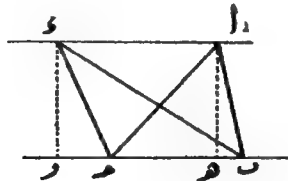
(٩) AB ح CD شكل رباعي فاذا كان القطر AC ينصف القطر BD فبرهن على أن $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ يكافئ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$

(١٠) AB ح CD شكل رباعي نصف قطره AC في E فبرهن على أن الشكل الرباعي $ABCE$ $ADCE$ يكافئ الشكل الرباعي $ABCE$ $ADCE$

(١١) AB ح مثلث فرضت نقطة M مثل E على قاعدته BC ثم نصف AE في F فبرهن على أن مساحة $\triangle ABE = \frac{1}{2}$ مساحة $\triangle ABC$

« نظرية ٧٧ »

المثلثات المتحدة في القاعدة ورءوسها على مستقيم مواز لها متكافئة



(شكل ١٧٤)

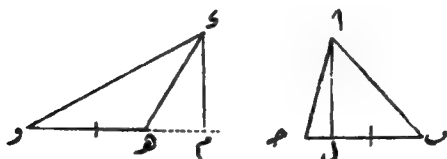
(المفروض) ان AB ح DE BC ح EF مثلثان متحدان في القاعدة

ب ح وان رأسهما ا ٦ و على المستقيم ا و الذي يوازي ب ح
 (المطلوب اثباته) ان المثلث ا ب ح يكافئ المثلث و ب ح
 (البرهان) نرسم الارتفاعين ا ه و ٦ و
 فيكون مساحة $\triangle ا ب ح = \frac{1}{2} ب ح \times ا ه$
 ومساحة $\triangle و ب ح = \frac{1}{2} ب ح \times و ٦$
 ولكن $ا ه = و ٦$ (نظرية ٤٠)
 فيكون $\frac{1}{2} ب ح \times ا ه = \frac{1}{2} ب ح \times و ٦$
 أى ان $\triangle ا ب ح$ يكافئ $\triangle و ب ح$ وهو المطلوب
 (نتيجة) المثلثات المتحدة في القاعدة والارتفاع متكافئة

د نظرية ٧٨ «

(وهي عكس نظرية ٧٧)

المثلثات المتكافئة ذوات القواعد المتساوية تكون ارتفاعاتها
 متساوية



(شكل ١٧٥)

(المفروض) ان ا ب ح و ٦ و ه و مثلثان متكافئان وأن القاعدة
 $ب ح = ه و$

(المطلوب اثباته) ان الارتفاع $ا ل = ٢ س$

(البرهان) مساحة $\triangle ا ب ح = ح ب \times ح ا ل$

ومساحة $\triangle س ه و = ح و \times ح س$

ومن حيث أن $\triangle ا ب ح$ يكافئ $\triangle س ه و$ بالفرض

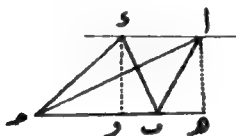
يكون $ح ب \times ح ا ل = ح و \times ح س$

ولكن $ح ب = ح و$ بالفرض

اذن $ا ل = ٢ س$ وهو المطلوب

(نتيجة) المثلثات المتكافئة المتحدة في القاعدة والمرسومة في

جهة واحدة منها تكون رؤوسها على مستقيم يوازي القاعدة



(شكل ١٧٦)

فثلا في شكل (١٧٦) اذا كان المثلث $ا ب ح$ يكافئ المثلث

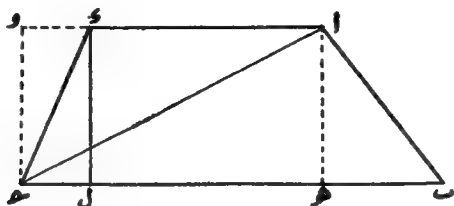
$س ه و$ وكانت $ا ل$ و $س$ في جهة واحدة من القاعدة المشتركة بين المثلث

كان $ا ل$ يوازي $س ح$

« نظرية ٧٩ »

مساحة شبه المنحرف تساوى حاصل ضرب نصف مجو

قاعدتيه المتوازيين في الارتفاع



(شكل ١٧٧)

(المفروض) ان AB و DC شبه منحرف قاعدتاه المتوازيتان
 AB و DC و ارتفاعه $و$
 (المطلوب اثباته) ان مساحة AB و DC

$$= \frac{1}{2} (AB + DC) \times و$$

(البرهان) نصل القطر AC ونرسم الارتفاعات AL و CH و $و$
 ثم نقول

$$\text{مساحة } \triangle ADC = \frac{1}{2} DC \times و$$

$$\text{مساحة } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \times و$$

وبجمع هاتين المتساويتين بعضهما على بعض

تكون مساحة شبه المنحرف AB و DC

$$= \frac{1}{2} DC \times و + \frac{1}{2} AB \times و$$

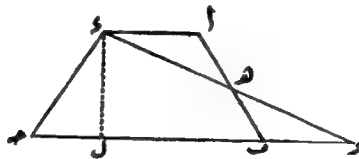
ومن حيث ان $AL = و = CH$ (نظرية ٤٠)

$$\text{تكون مساحة } AB \text{ و } DC = \frac{1}{2} DC \times و + \frac{1}{2} AB \times و$$

$$= \frac{1}{2} (AB + DC) \times و$$

وهو المطلوب

(برهان آخر) ننصف AB في $و$ ونصل $و$ ونعده الى أن
 يقابل $و$ في $و$ ثم نقول



(شكل ١٧٨)

في المثلثين $\triangle ADE$ و $\triangle ABC$

$$\angle ADE = \angle ABC$$

من حيث أن $\angle ADE = \angle ABC$ و $\angle AED = \angle ACB$ بالتقابل في الرأس بالتبادل

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية هـ)

$$\text{ويكون } AD = BC$$

$$\triangle ADE \text{ و } \triangle ABC \text{ يكافئ } \triangle ABC$$

وبإضافة الشكل الرباعي $ADCE$ إلى كل من هذين المثلثين

المكافئين

يكون المثلث ADC و ABC يكافئ شبه المنحرف $ADCE$

$$\text{ولكن مساحة } \triangle ADC = \frac{1}{2} \times DC \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (AD + BC) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (AD + BC) \times h$$

$$\text{اذن مساحة شبه المنحرف } ADCE = \frac{1}{2} \times (AD + BC) \times h$$

وهو المطلوب

$$\times DC$$

(تعريف) في أي متوازي أضلاع مثل $ADCE$ (شكل ١٧٩)

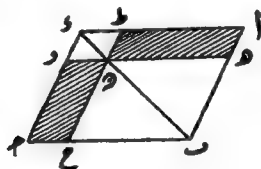
إذا فرضت نقطة مثل h على أحد قطريه AC ورسم منها المستقيم

هـ و يوازي اء ب ح والمستقيم ط ح يوازي ا ب و ح فان
الشكل ينقسم الى أربعة متوازيات اضلاع و ط ح هـ و ح
ط هـ

ويقال ان و ط ح هـ مرسومان على القطر ب و وان و ح
ط هـ متممان لتوازي الاضلاع المرسومين على القطر المذكور

« نظرية ٨٠ »

متوازيات الاضلاع المتممان لتوازي الاضلاع المرسومين على
قطر متوازي اضلاع معلوم متكافئان



(شكل ١٧٩)

(المفروض) ان ا ب ح و متوازي اضلاع وان هـ نقطة ما
على قطره ب و وان المستقيم هـ و يوازي اء ب ح والمستقيم
ط ح يوازي ا ب و ح

(المطلوب اثباته) ان متوازي الاضلاع هـ ط ح و متكافئان

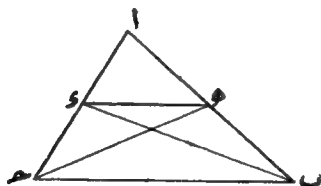
(البرهان) من حيث ان قطر متوازي الاضلاع يقسمه الى

مثلثين متساويين

يكون $\triangle ا ب و$ يكافئ $\triangle ح ب و$
 ٦ $\triangle ه ب و$ يكافئ $\triangle ع ب و$
 ٦ $\triangle ط و و$ يكافئ $\triangle و ه و$
 وبطرح كل مثلثين جزئيين من المثلث الذى يحتويهما
 يكون $\triangle ا ب و - \triangle ه ب و - \triangle ع ب و - \triangle ط و و$
 يكافئ $\triangle ح ب و - \triangle و ه و$
 اى ان متوازى الاضلاع ه ط يكافئ ح و وهو المطلوب

تمارين (٢٨)

(١) برهن بواسطة المساحات على أن المستقيم الذى يصل منتصفى
 ضلعين فى مثلث يوازى الضلع الثالث



(شكل ١٨٠)

(الفروض) ان ا ب ح مثلث وان نقطة ه منتصف ا ب
 ونقطة و منتصف ا ح
 (المطلوب اثباته) ان ه و يوازى ب ح
 (البرهان) نصل ه ح و ب ثم نقول

مساحة $\triangle ب ح و = \frac{1}{2}$ مساحة $\triangle ا ب ح$

مساحة $\triangle ب ح و = \frac{1}{2}$ مساحة $\triangle ا ب ح$

اذن $\triangle ب ح و$ يكافئ $\triangle ب ح و$

ومن حيث ان هذين المثلثين المتكافئين قاعدتهما مشتركة وهي ب ح

يكون ه و يوازي ب ح وهو المطلوب

(٢) ا ب ح مثلث رسم فيه المستقيم و ه يوازي قاعدته ب ح

بحيث يقطع الضلع ا ب في و والضلع ا ح في ه - برهن على أن

$\triangle ا ب و$ يكافئ $\triangle ا ح و$

(٣) اذا تقاطع المستقيمان س ح و ص ب في و وكان

$\triangle س و ب$ يكافئ $\triangle ص و ح$ فبرهن على أن س ص يوازي ب ح

(٤) ب ا ح زاوية فرض على ضلعها ا ب نقطة و وفرض على

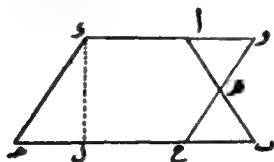
ضلعها ا ح نقطة ه فاذا كان $\triangle ا ه ب$ يكافئ $\triangle ا و ح$ فبرهن

على أن و ه يوازي ب ح

(٥) ا ب ح و شبه منحرف (شكل ١٨١) نصف ضلعه ا ب

في نقطة ه ورسم منها و ح يوازي و ح برهن على أن شبه

المنحرف ا ب ح و يكافئ متوازي الاضلاع ح و و



(شكل ١٨١)

(البرهان) في المثلثين و ه ا ح ه ب

من حيث ان $\left. \begin{array}{l} ١ هـ = هـ ب \\ ٦ ا هـ و = و ب هـ ج \\ ٦ ا و ا هـ = هـ ج ب هـ \end{array} \right\}$ بالعمل بالتقابل في الرأس بالتبادل

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٥)

ويكون $\triangle و هـ ا$ يكافئ $\triangle ج هـ ب$

$$٦ و ا = ا ب ج$$

وبإضافة الشكل ذى خمسة الاضلاع ا هـ ج ح و الى كل من المثلثين المتكافئين يكون شبه المنحرف ا ب ح مكافئاً متوازى الاضلاع

ح ج و و هو المطلوب

(٦) في الثمين السابق برهن على ان $و = \frac{١}{٢} (ا ب + ب ح)$

(البرهان) $و = ج ح$ (نظرية ٤٠)

$$\text{ولكن } و = ا ب + ا و$$

$$٦ ج ح - ب ح = ا ب + ا و$$

وبالجمع يكون

$$و + ج ح = ا ب + ا و + ب ح - ب ح$$

$$\text{أى ان } ٢ و + ا هـ = ا ب + ب ح$$

$$٦ و = \frac{١}{٢} (ا ب + ب ح) \text{ وهو المطلوب}$$

(ملاحظة) من حيث ان شبه المنحرف ا ب ح و يكافئ

متوازى الاضلاع ح ج و و

تكون مساحة ا ب ح و $= و \times و ل$

$$= \frac{١}{٢} (ا ب + ب ح) \times و ل$$

وقد سبقت البرهنة على هذه الخاصة بطريقتين أخريين (راجع

نظرية ٧٩)

(٧) برهن على أن المستقيم الواصل منتصفى ضلعى شبه المنحرف غير المتوازيين يوازى قاعدتيه المتوازيين

(٨) AB و CD متوازى اضلاع فرضت نقطة مثل E على قطره AC برهن على أن $ED \parallel AB$ و $ED \parallel BC$ يكافئ $AD = DC$

(٩) AB و CD متوازى اضلاع نصف ضلعه AD فى نقطة S وضلعه BC فى نقطة V فإذا اخذت نقطة مثل E على SV أو على امتداده فبرهن على أن مساحة $\triangle ADE = \frac{1}{2}$ مساحة متوازى الاضلاع $ABCD$

(١٠) AB و CD متوازى اضلاع فرضت نقطة S على ضلعه AD ونقطة V على ضلعه BC برهن على أن $SV \parallel AD$ يكافئ $\triangle ASV \sim \triangle BCD$

(١١) AB و CD شبه منحرف قاعدتاه المتوازيان AB و CD فإذا نصف ضلعه AD فى E فبرهن على أن مساحة $\triangle ABE = \frac{1}{2}$ مساحة $ABCD$

(١٢) AB و CD متوازى اضلاع فرضت نقطة ما مثل E داخله برهن على أن مجموع مساحتي المثلثين ABE و CDE يساوى نصف مساحة متوازى الاضلاع

الباب الثاني

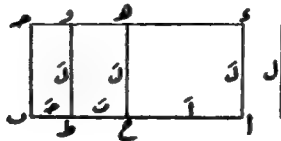
في الاستدلال الهندسى لبعض متطابقات جبرية

يوجد بعض متطابقات جبرية يمكن اثبات صحتها بالطرق الهندسية فضلا عن الطرق الجبرية ولها ارتباط عظيم بالنظريات الهندسية (تعريف) اذا فرضت نقطة على مستقيم معلوم قيل انها تقسمه من الداخل واذا فرضت على امتداده قيل انها تقسمه من الخارج ملاحظة — يقال للبعدين اللذين بين نقطة التقسيم وطرفى المستقيم جزءا المستقيم واذا كان الانقسام من الداخل فالمستقيم المعلوم يساوى مجموع جزأى التقسيم واذا كان الانقسام من الخارج فالمستقيم يساوى الفرق بين جزأى التقسيم

« متطابقة ١ »

الاثبات الهندسى للمتطابقة الجبرية

$$ل'(أ' + ب' + ح' + \dots) = ل'أ' + ل'ب' + ل'ح' + \dots$$



(شكل ١٨٢)

(العمل) نفرض المستقيم AB ونقسمه الى الاجزاء AC و CB
 CA بالرموز اليها بالرموز a و b و c ثم نقيم من A المستقيم
 AD عموداً على AB ومساوياً ل AC ونرسم من D المستقيم DE موازياً
 AB ثم نمد من C CE و CB المستقيمتين CE و CB و CB موازياً
 AD ونرمز الى كل منها بالرمز h
 (البرهان)

المستطيل $ACDE =$ المستطيل $ADBE$ + المستطيل $ACDE$ + المستطيل $CBDE$
 ولكن المستطيل $ACDE = l \times a$ من الوحدات المربعة
 $= l(a + b + c)$ من الوحدات المربعة
 والمستطيل $ADBE = l \times h$ من الوحدات المربعة
 $= l \times h$
 والمستطيل $CBDE = h \times c$
 $= l \times b$
 والمستطيل $ACDE = h \times a$
 $= l \times c$

أى ان

$$l(a + b + c) = l \times h + l \times b + l \times c$$

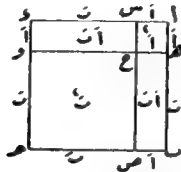
وبالمثل نبرهن على ان

$$l(a + b + c + \dots) = l \times h + l \times b + l \times c + \dots$$

« متطابقة ٢ »

الاثبات الهندسى للمطابقة الجبرية

$$^2(ا + ب) = ا^2 + ٢ا'ب + ب^2$$



(شكل ١٨٣)

(العمل) نفرض المستقيم $ا ب$ ونقسمه من الداخل الى الجزئين $ا هـ$ و $هـ ب$ الرموز اليهما بالرمزين $ا'$ و $ب'$ ثم ننشئ على $ا ب$ المربع $ا ب ح د$ وتأخذ على $ب ح$ البعد $ب ص$ مساوياً $ا هـ$ أى مساوياً $ا'$ فيكون $ص ح = ب'$ ثم نمد من $هـ$ المستقيم $هـ$ وموازياً $ا د$ ومن $ص$ المستقيم $ص س$ موازياً $ا ب$ وقاطعاً $هـ$ و في $ح$ (البرهان) المربع $ا ح =$

المربع $ا ح +$ المستطيل $س و +$ المستطيل $هـ ص +$ المربع $ح ب$ ولكن المربع $ا ح = (ا' + ب')^2$ من الوحدات المربعة

والمربع $ا ح = ا'^2$ » » »

والمستطيل $س و = ا' ب'$ » » »

والمستطيل $هـ ص = ا' ب'$ » » »

والمربع $ح ب = ب'^2$ » » »

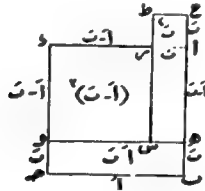
أى ان $(ا' + ب')^2 = ا'^2 + ٢ا'ب + ب'^2$

وهو المطلوب

« متطابقة ٣ »

الانبات الهندسي للمطابقة الجبرية

$$^2(ا' - ب') = ا'^2 - ب'^2 + 2ا'ب' - 2ا'ب'$$



(شكل ١٨٤)

(العمل) نقرض المستقيم اء ونقسمه من الداخل في النقطة

مر ثم نرمز الى اء بالرمز ا' والى اء بالرمز ب' فيكون مرء =

ا' - ب' ثم ننشئ على مرء المربع مرء و س ونعد و س الى ان

يقابل ا ب في ه فيكون ب ه = ب'

ثم نمد ه الى ح بحيث يكون ه ح = ا' فيكون ا ح = ب'

وننشئ على ا ح المربع ا ح ط مر

(البرهان) المربع مر و =

المربع ا ح + المربع ح مر - المستطيل ح س - المستطيل ه ح

ولكن المربع مر و = (ا' - ب')^2 من الوحدات المربعة

والمربع ا ح = ا ح^2

والمربع ح مر = ب' ب'^2

والمستطيل ح س = ا' ب'

والمستطيل ه ح = ا' ب'

أى ان $(\text{أ} - \text{ب})^2 = \text{أ}^2 - 2\text{أب} + \text{ب}^2$ وهو المطلوب

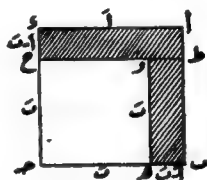
« متطابقة ع »

الانبات الهندسى للمطابقة الجبرية

$$(\text{أ} - \text{ب})(\text{أ} + \text{ب}) = \text{أ}^2 - \text{ب}^2$$



(شكل ١٨٦)



(شكل ١٨٥)

(العمل) نقرض المستقيم أ ب ونرمز اليه بالرمز أ وننشئ عليه المربع أ ح ثم نأخذ البعد ح = ب وننشئ عليه المربع ح ح و ه فيكون ح ز = ح ه = ب - أ = ح - أ

(البرهان)

المربع أ ح - المربع و ح = المستطيل أ ح + المستطيل ط ه وبوضع المستطيلين أ ح ط ه أحدهما بجانب الآخر كما هو مبين بشكل (١٨٦)

يكون المستطيل أ ح + المستطيل ط ه = المستطيل ح ح

أى ان المربع أ ح - المربع و ح = المستطيل ح ح

ولكن المربع أ ح = أ^2 من الوحدات المربعة

والمربع و ح = ب^2

والمستطيل $مر ص = (أ' + ب') (أ' - ب')$ من
الوحدات المربعة

$$(أ' - ب') (أ' + ب') = أ'^2 - ب'^2$$

وهو المطلوب

(نتيجة) إذا نصف مستقيم وقسم الى جزأين غير متساويين
من الداخل او من الخارج كان المستطيل المكون من الجزأين غير
المتساويين مكافئاً للفرق بين المربعين المشأ أحدهما على نصف
المستقيم والآخر على البعد المحصور بين نقطتي التقسيم
(الحالة الاولى) عند ما تكون نقطة الاقسام من الداخل



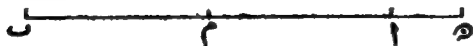
(شكل ١٨٧)

(المفروض) ان $أ ب$ مستقيم محدود (شكل ١٨٧) وان $م$
منتصفه وان $د$ نقطة ما داخله

$$\begin{aligned} & \overline{أ د} - \overline{ب د} = \overline{أ د} \times \overline{ب د} \quad \text{ان } أ ب \text{ مستقيم محدود (شكل ١٨٧) وان } م \\ & \text{البرهان) } (أ د + ب د) (أ د - ب د) = أ د \times ب د \\ & (أ د + ب د) (أ د - ب د) = \\ & \overline{أ د} - \overline{ب د} = \end{aligned}$$

وهو المطلوب

(الحالة الثانية) عند ما تكون نقطة الاقسام من الخارج



(شكل ١٨٨)

(٧)

(المفروض) ان AB مستقيم محدود (شكل ١٨٨) وان M منتصفه وان D نقطة ما خارجه

$$\begin{aligned} & \text{(المطلوب اثباته) ان } AD \times DB = DM^2 - \text{(المطلوب البرهان)} \\ & (AD + DB)(AD - DB) = AD \times DB \\ & (AD + DB)(AD - DB) = \\ & \text{وهو المطلوب } AD^2 - DB^2 = \end{aligned}$$

تمارين (٢٩)

(١) برهن بالطرق الهندسية على أن المتطابقتين الجبريتين الآتيتين صحيحتان

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

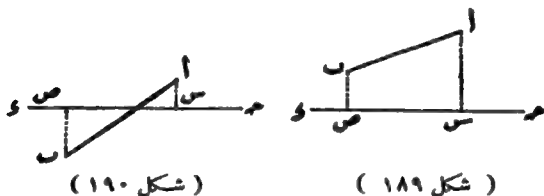
(٢) اذا قسم مستقيم معلوم الى جزأين كان المربع المنشأ على هذا المستقيم المعلوم مكافئاً لمجموع المستطيلين المكون أحدهما من المستقيم المعلوم واحد الجزأين والثاني من المستقيم المعلوم والجزء الآخر

(٣) اذا قسم مستقيم معلوم الى جزأين كان المستطيل المكون من المستقيم المعلوم وأحد الجزأين مكافئاً للمربع المنشأ على هذا الجزء مضافاً اليه المستطيل المكون من الجزأين

الباب الثالث

في المربعات المنشأة على اضلاع المثلث

(تعريف) اذا انزلنا من نهايتى مستقيم معلوم مثل AB العمودين AS و BS على مستقيم آخر مثل CD فانه يقال للنقطتين S و S' مسقطا A و B على CD ويقال للمستقيم CD مسقط AB على CD سواء تقاطع AB و CD كما فى شكل (١٨٩) أو لم يتقاطعا كما فى شكل (١٨٩)



« نظرية ٨١ »

(الملقبة بنظرية فيثاغورس)

المربع المنشأ على وتر المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على ضلعي القائمة

معه في القاعدة ح ب ومحصور معه بين المتوازيين ح ب و ٦ و ح
وكذلك \triangle ا ب ح يكافئ نصف المستطيل ب ص لانه متحد
معه في القاعدة ب ه ومحصور معه بين المتوازيين ب ه و ٦ ا ص
اذن المربع ب و يكافئ المستطيل ب ص
وكذلك اذا وصلنا ب ي و ٦ ا و نبرهن على ان المربع ح ط
يكافئ المستطيل ح ص

اذن المستطيل ب ص + المستطيل ح ص = مجموع المربعين
ب و و ٦ ح ط

اى ان المربع ب و = مجموع المربعين ب و و ٦ ح ط
وبعبارة اخرى ب ح = $\sqrt{ب ب}$ + $\sqrt{٦ ا}$ وهو المطلوب
(نتيجة) في المثلث القائم الزاوية المربع المنشأ على احد ضلعي
القائمة يكافئ المستطيل المكون من الوتر ومسقط الضلع على هذا الوتر

فمثلا في المثلث ا ب ح شكل (١٩١)

$$\sqrt{ب ب} = ب ح \times ب ب س$$

$$\sqrt{٦ ا} = ب ح \times ح س$$

(البرهان) في النظرية السابقة قد ثبت ان

المربع ب و يكافئ المستطيل ب ص

$$\sqrt{ب ب} = ب ح \times ب ب س$$

$$\sqrt{٦ ا} = ب ح \times ح س$$

وهو المطلوب

وكذا المربع ح ط يكافئ المستطيل ح ص

تنطبق المثلثات بعضها على بعض (نظرية ٤)

ويكون $ا ب = ب د = د ه = ه ا$

وتكون المثلثات الاربعة متكافئة

ولكن من حيث ان $ا ب = ب د = د ه = ه ا$

$6 د ه ا ب = ا ب د ه + ا ح د + ا ح ب$

$= د ه ا ب + ا ح د + ا ح ب$

$و =$

يكون الشكل $ا ه ب$ مربعاً وهو المربع المنشأ على الوتر $ا ب$

في المثلث $ا ح ب$

وعليه فلو طرحنا المثلثين $ا ل ه 6 ه و د$ من الشكل الكلى

لكان الباقي المربع $ا ه و ب$

ولو طرحنا المثلثين $ا ح ب 6 ب ح د$ من الشكل الكلى لكان

الباقي المربع $ا ل ط ح$ مضافاً اليه المربع $ح ط و د$

ويكون هذان الباقيان متساويين

اى ان المربع $ا ه و ب$ يكافئ مجموع المربعين $ا ل ط ح$

$6 ح ط و د$

وبعبارة اخرى يكون $ا ب^2 = ا ح^2 + ب ح^2$

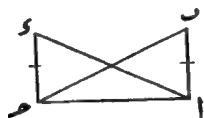
وهو المطلوب

« نظرية ٨٢ »

(وهى عكس نظرية فيثاغورس)

اذا كان المربع المنشأ على أحد اضلاع مثلث يساوى مجموع

المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين كانت الزاوية المحصورة بين هذين الضلعين قائمة



(شكل ١٩٣)

(المفروض) ان $\angle س = \angle ب$ مثلث فيه $\angle س = \angle ب$ $\angle ح = \angle ا$

(المطلوب اثباته) ان $\angle س = \angle ب$ قائمة

(البرهان) من نقطة ح نرسم ح د عموداً على ا ح ونأخذ

البعد ح د = ح ا ونصل د س ا ثم نقول

في المثلث س د ا من حيث ان زاوية ا ح د قائمة بالعمل

$$\angle س = \angle ا \quad \angle د = \angle ا \quad \angle ح = \angle ا$$

$$\angle س = \angle د \quad \text{ولكن}$$

$$\angle س = \angle ا \quad \angle د = \angle ا \quad \angle ح = \angle ا$$

$$\angle س = \angle د \quad \text{ولكن}$$

$$\angle س = \angle د \quad \angle ح = \angle ا$$

$$\angle س = \angle د \quad \angle ح = \angle ا$$

ثم نقول في المثلثين س د ا ح د ا

$$\left. \begin{array}{l} \text{بالاثبات} \\ \text{مشارك بين المثلثين} \\ \text{بالعمل} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \angle س = \angle د \\ \angle ح = \angle ا \\ \angle س = \angle د \end{array} \quad \text{من حيث ان}$$

يتساوى المثلثان من عامة الوجوه (نظرية ٨)

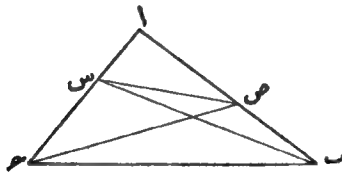
وتكون $\angle A = \angle B$ و $\angle C = \angle D$

ولكن $\angle A = \angle B$ قائمة بالعمل

اذن $\angle A = \angle B$ قائمة وهو المطلوب

تمارين (٣٠)

(١) ا ب ح مثلث قائم الزاوية في ا رسم المستقيم س ص قاطعاً ا ب في س و ا ب في ص فاذا وصل ب س و ج ح ص فبرهن على ان $\angle B = \angle C$ و $\angle A = \angle D$



(شكل ١٩٤)

(البرهان) في $\triangle ABC$ القائم الزاوية في ا

$$\angle B + \angle C = 90^\circ$$

وفي $\triangle ADE$ القائم الزاوية في ا

$$\angle A + \angle D = 90^\circ$$

وبإضافة المتساوية الاولى الى الثانية

يكون $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$

ولكن $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$ (نظرية فيثاغورس)

6 $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$ (» »)

اذن $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$

وهو المطلوب

(٢) ارسم مربعا يساوى مجموع مربعين معلومين

(٣) ارسم مربعاً يساوى مجموع ثلاثة مربعات معلومة

(٤) ارسم مربعاً يساوى الفرق بين مربعين معلومين

(٥) ا ب ح مثلث رسم فيه الارتفاع ا د والمطلوب البرهنة

على أن

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$$

(٦) برهن على أن المربع المنشأ على قطر المربع يساوى ضعف

هذا المربع

(٧) كيف تقسم مستقيماً الى قسمين بحيث يكون مربع

احدهما ضعف مربع الآخر

(٨) ا ب ح مثلث قائم الزاوية ب فرضت نقطة مثل د على

ضلعه ب ح والمطلوب البرهنة على أن

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$$

(٩) ا ب ح د شكل رباعي قطراه متعامدان والمطلوب البرهنة

على أن $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$

(١٠) ا ب ح د شكل رباعي فرضت نقطة مثل د داخله والمطلوب البرهنة على أن

$$\sqrt{دب} + \sqrt{دح} = \sqrt{دا} + \sqrt{دع}$$

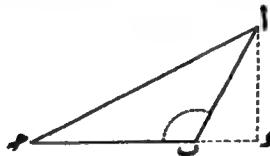
(١١) برهن على أن المربع المنشأ على العمود النازل من رأس القائمة على الوتر في المثلث القائم الزاوية يكافئ المستطيل المكون من جزأى الوتر

(١٢) اذا فرضت نقطة د داخل المثلث ا ب ح وانزل منها على اضلاعه الاعمدة د ه س على ب ح و د و ص على ا ب و د ع على ا ب فبرهن على أن

$$\sqrt{دب} + \sqrt{دح} + \sqrt{دع} = \sqrt{دب} + \sqrt{دح} + \sqrt{دع}$$

« نظرية ٨٣ »

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية المنفرجة في المثلث المنفرج الزاوية يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين مضافاً اليه ضعف المستطيل المكون من أحد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه



(شكل ١٩٥)

(المفروض) ان ا ب ح مثلث منفرج الزاوية في ب

(المطلوب اثباته)

ان $\overline{ا ح}^2 = \overline{ح ب}^2 + \overline{ا ب}^2 + ٢ ح ب \times ا ب$ (البرهان) نرسم من ا الارتفاع اء بحيث يقطع امتداد ح ب في و ثم قول

في $\triangle اء ح$ القائم الزاوية في و

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا و}^2 + \overline{و ح}^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورس})$$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب$$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب$$

(متطابقة ٢)

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب \quad (\text{نظرية فيثاغورس})$$

وبالتعويض يكون

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب + \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب$$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب و}^2 + ٢ ب و \times ا ب$$

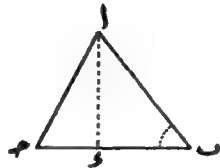
وهو المطلوب

« نظرية ٨٤ »

المربع المنشأ على الضلع المقابل للزاوية الحادة في أى مثلث يكافئ مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين مطروحاً منه ضعف المستطيل المكوّن من احد هذين الضلعين ومسقط الآخر عليه



(شكل ١٩٧)



(شكل ١٩٦)

(المفروض) ان AB ح مثلث حاد الزاوية في B
(المطلوب اثباته)

$$\text{ان } AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos B$$

(أولاً) البرهان عندما تكون جميع زوايا المثلث حادة كما في
(شكل ١٩٦)

نرسم من A الارتفاع AD بحيث يقطع BC في D ثم نقول
في $\triangle ABD$ AD ح القائم الزاوية في D

$$(نظرية فيثاغورس) \quad AD^2 + BD^2 = AB^2$$

$$\text{ولكن } AD^2 = AC^2 - CD^2$$

$$= AC^2 - CD^2 + BD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD$$

(متطابقة ٣)

$$(نظرية فيثاغورس) \quad AC^2 - CD^2 + BD^2 = AB^2$$

وبالتعويض يكون

$$\begin{aligned} & \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} \times \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \\ & \overline{2} \times \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \end{aligned}$$

وهو المطلوب

(ثانياً) البرهان عندما تكون احدى زوايا المثلث منفرجة
ويقطع العمود $ا$ امتداد $ب$ ح في $د$ كما في (شكل ١٩٧)
في $\triangle ا د ح$ القائم الزاوية في $د$

$$\begin{aligned} & \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \quad (\text{نظرية فيثاغورس}) \\ & \overline{2} = \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} \quad \text{ولكن} \\ & \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \times \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \end{aligned}$$

(متطابقة ٣)

$$\begin{aligned} & \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \quad 6 \quad (\text{نظرية فيثاغورس}) \\ & \text{وبالتعويض يكون} \end{aligned}$$

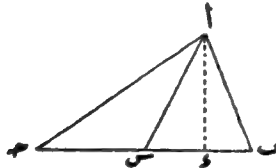
$$\begin{aligned} & \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} \times \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \overline{2} \\ & \overline{2} \times \overline{2} - \overline{2} + \overline{2} = \end{aligned}$$

وهو المطلوب

« نظرية ٨٥ »

(المقبة بنظرية ابولونيوس)

مجموع المربعين المنشأين على ضلعين من مثلث يكافئ ضعف
المربع المنشأ على نصف الضلع الثالث مضافاً إليه ضعف المربع
على المستقيم المتوسط لهذا الضلع



(شكل ١٩٨)

(المفروض) ان AB ح مثلث وان AS المستقيم المتوسط
الذي ينصف الضلع B ح

$$\overline{AB}^2 + \overline{AS}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{AS}^2 \quad (\text{المطلوب اثباته})$$

(البرهان) نرسم الارتفاع AD ونفرض انه يقع بين A و S
فتكون $AS > BS$ حادة و $AS > BS$ ح منفرجة ثم نقول

في $\triangle ABS$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 - 2 \cdot \overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \cos \angle ASB$$

(نظرية ٨٤)

وفي $\triangle ADS$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2} + \sqrt{d^2} + \sqrt{e^2} + \sqrt{f^2} + \sqrt{g^2} + \sqrt{h^2} + \sqrt{i^2} + \sqrt{j^2} + \sqrt{k^2} + \sqrt{l^2} + \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} + \sqrt{o^2} + \sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} + \sqrt{r^2} + \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2} + \sqrt{u^2} + \sqrt{v^2} + \sqrt{w^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}$$

(نظرية ٨٣)

وبالجمع يكون

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{c^2} + \sqrt{d^2} + \sqrt{e^2} + \sqrt{f^2} + \sqrt{g^2} + \sqrt{h^2} + \sqrt{i^2} + \sqrt{j^2} + \sqrt{k^2} + \sqrt{l^2} + \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} + \sqrt{o^2} + \sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} + \sqrt{r^2} + \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2} + \sqrt{u^2} + \sqrt{v^2} + \sqrt{w^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}$$

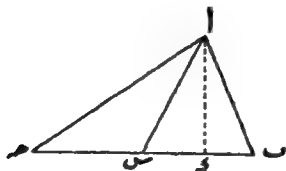
ومن حيث ان $b = c$

$$\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = \sqrt{c^2} + \sqrt{d^2} + \sqrt{e^2} + \sqrt{f^2} + \sqrt{g^2} + \sqrt{h^2} + \sqrt{i^2} + \sqrt{j^2} + \sqrt{k^2} + \sqrt{l^2} + \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} + \sqrt{o^2} + \sqrt{p^2} + \sqrt{q^2} + \sqrt{r^2} + \sqrt{s^2} + \sqrt{t^2} + \sqrt{u^2} + \sqrt{v^2} + \sqrt{w^2} + \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} + \sqrt{z^2}$$

وهو المطلوب

د نظرية ٨٦

الفرق بين المربعين المنشأين على ضلعي مثلث يكافئ ضعف المستطيل المكوّن من الضلع الثالث والبعء بين منتصف هذا الضلع وموقع العمود النازل من الرأس المقابل له عليه



(شكل ١٩٩)

(المفروض) ان $AB = AC$ مثلث وان AD المستقيم المتوسط الذي ينصف الضلع BC في D ونقطة E موقع العمود النازل من A على BC

(المطلوب اثباته) ان $\overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 = \overline{ب ح}^2 - \overline{ا ح}^2$

(البرهان) في $\triangle ا ح س$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ح}^2 + \overline{ا س}^2 - \overline{ا ح}^2 - \overline{ا س}^2$$

(نظرية ٨٣)

وفي $\triangle ا ب س$

$$\overline{ا ب}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ا س}^2 - \overline{ا ب}^2 - \overline{ا س}^2$$

(نظرية ٨٤)

وبالطرح يكون

$$\overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 = \overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 + \overline{ا س}^2 - \overline{ا ح}^2 - \overline{ا س}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 = \overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 + \overline{ا س}^2 - \overline{ا ح}^2 - \overline{ا س}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 = \overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 + \overline{ا س}^2 - \overline{ا ح}^2 - \overline{ا س}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2 = \overline{ا ح}^2 - \overline{ب ا}^2$$

وهو المطلوب

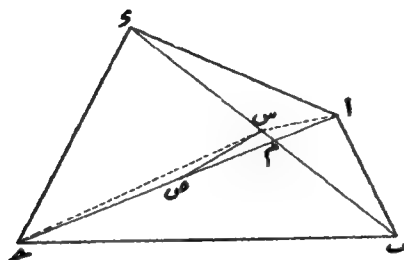
« نظرية ٨٧ »

مجموع المربعات المنشأة على الاضلاع الاربعة لاي شكل رباعي يكافئ مجموع المربعين المنشأين على قطريه مضافاً اليه اربعة أمثال

المرج المنشأ على المستقيم الذي يصل منتصفيهما

(المفروض) ان $ا ب ح د$ شكل رباعي وان $س$ منتصف

قطره $ب د$ $ص$ منتصف قطره $ا ح$



(شكل ٢٠٠)

(المطلوب اثباته) ان

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2 + 3\overline{AM}^2$$

(البرهان) فصل ١٦ س ٦ ثم نقول

في $\triangle ABS$

$$\overline{AB}^2 + \overline{BS}^2 = \overline{AS}^2 + 2\overline{AM}^2$$

(نظرية ابولونيوس)

وفي $\triangle ACS$

$$\overline{AC}^2 + \overline{CS}^2 = \overline{AS}^2 + 2\overline{AM}^2$$

(نظرية ابولونيوس)

وبالجمع يكون

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = 2(\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2) + 6\overline{AM}^2$$

$$= 2(\overline{AS}^2 + \overline{BS}^2 + \overline{CS}^2) + 3\overline{AM}^2 \quad (١)$$

ولكن في $\triangle اس ح$

$$\overline{اس}^2 + \overline{س ح}^2 = \overline{ا ح}^2 + \overline{ا ص}^2$$

(نظرية ابولونيوس)

$$\overline{ا ح}^2 + \overline{ا ص}^2 = (\overline{اس} + \overline{س ح})^2$$

وبالتعويض في مساوية (١) يكون

$$\overline{ا ح}^2 + \overline{ا ص}^2 + \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ح}^2 + \overline{ا ح}^2 + \overline{ا ص}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ص}^2 + \overline{ب ح}^2 - \overline{ا ب}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ح}^2 - \overline{ا ص}^2$$

$$\overline{ا ح}^2 + \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ح}^2 = \overline{ا ص}^2 + \overline{ا ح}^2 + \overline{ا ب}^2$$

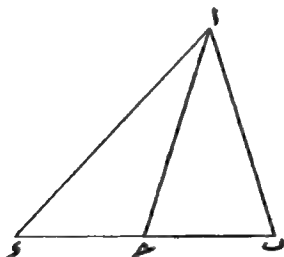
وهو المطلوب

تمارين (٣١)

(١) $ا ب ح$ مثلث متساوي الساقين مدت قاعدته $ب ح$ الى

$و$ بحيث كان $ح د = ب ح$ والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{ا د}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ح}^2$$



(شكل ٢٠١)

(البرهان) في $\triangle ABC$ نقطة D منتصف BC و

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \quad \text{فيكون}$$

(نظرية أبولونيوس)

ولكن $BD = DC$ بالتفرض

$$\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 \quad \text{فيكون}$$

(٢) AD مثلث متساوي الساقين فرضت نقطة D على قاعدته BC والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} + \overline{AB}^2$$

(٣) في التمرين السابق اذا فرضت نقطة D على امتداد القاعدة فبرهن على ان

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} + \overline{AB}^2$$

(٤) AD مثلث متساوي الساقين ($AB = AC$) انزل

فيه الارتفاع AD على الضلع BC والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{AD}^2 = \overline{BD} \times \overline{DC} + \overline{AB}^2$$

(٥) اذا كانت الزاويتان ب ٦ ح في \triangle ا ب ح حادثين وكان ب ه عموداً على ا ح ٦ ح و عموداً على ا ب فبرهن على ان

$$ا ب \times ا ح = ا ه \times ا ح$$

(٦) في التمرين السابق برهن على أن

$$ب ح^2 = ا ب \times ا ح + ا ه \times ا ح$$

(٧) ا ب ح مثلث متساوى الساقين (ا ب = ا ح) فاذا

مد ضلعه ا ح الى د وكان ح د = ا ح فبرهن على ان

$$ب د^2 = ا ب^2 + ا ح^2$$

(٨) ا ه ا مثلث قسمت قاعدته ا د الى ثلاثة اقسام

متساوية بالنقطتين ب ٦ ح والمطلوب البرهنة على ان

$$ا د^2 = ا ب^2 + ا ح^2 + ا ه^2$$

(٩) في التمرين السابق برهن على ان

$$ا د^2 = ا ب^2 + ا ح^2 + ا ه^2$$

(١٠) برهن على أن مجموع المربعات المنشأة على اضلاع متوازي

الاضلاع يكافئ مجموع المربعين المنشأين على قطريه

(١١) برهن على ان مجموع المربعين المنشأين على قطري اى

شكل رباعى يكافئ ضعف مجموع المربعين المنشأين على المستقيمين

الواصلين بين منتصفى كل ضلعين متقابلين

(١٢) برهن على ان ثلاثة امثال مجموع المربعات المنشأة على

اضلاع المثلث تكافئ اربعة امثال مجموع المربعات المنشأة على

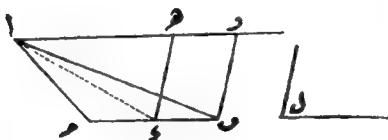
مستقيماه المتوسطة

الباب الرابع

في الدعاوى العملية

« عملية ٢١ »

المطلوب رسم متوازي اضلاع يكافئ مثلثاً معلوماً بحيث تكون
احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



(شكل ٢٠٢)

(المفروض) ان $\triangle ABC$ المثلث المعلوم وان $\angle A$ الزاوية المعلومه
(المطلوب عمله) رسم متوازي اضلاع يكافئ $\triangle ABC$
بحيث تكون احدى زواياه تساوى زاوية $\angle A$

(العمل) نضع B ح في $\angle A$ ونرسم منها المستقيم BA يصنع
مع BA الزاوية B و BA تساوى AC ونرسم من B المستقيم BC و
يوازي BA ومن A المستقيم AD و يوازي BC

فيكون B و BA و هو متوازي الاضلاع المطلوب

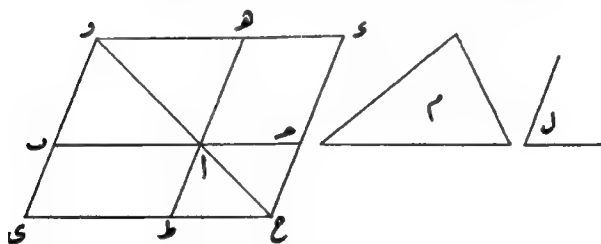
(البرهان) متوازي الاضلاع B و BA يكافئ ضعف $\triangle ABC$

(نظرية ٧٦)

ولكن $\triangle ا ب ح$ يكافئ ضعف $\triangle ا ب و$
 اذن متوازي الاضلاع $ب و ه و$ يكافئ $\triangle ا ب ح$
 ومن حيث ان احدى زوايا متوازي الاضلاع المذكور وهي
 $ب و ه$ تساوى الزاوية ل المعلومة
 يكون $ب و ه و$ هو متوازي الاضلاع المطلوب رسمه

« عملية ٢٢ »

المطلوب رسم متوازي اضلاع على قاعدة معلومة يكافئ مثلثاً
 معلوماً بحيث تكون احدى زواياه مساوية لزاوية معلومة



(شكل ٢٠٣)

(المفروض) ان $م$ الثلث المعلوم وان ل الزاوية المعلومة وان
 $ا ب$ القاعدة المعلومة

(المطلوب عمله) رسم متوازي اضلاع على القاعدة $ا ب$ يكافئ
 $\triangle م$ بحيث تكون احدى زواياه تساوى زاوية ل

(العمل) نرسم متوازي اضلاع $ا ح و ه$ يكافئ $\triangle م$ بحيث
 تكون احدى زواياه $ا ح$ مساوية لزاوية ل

ثم نضع هذا المتوازي الاضلاع بحيث تكون قاعدته $ا ح$ على استقامة القاعدة المعلومة $ا ب$

ونرسم من $ب$ المستقيم $ب و$ يوازي $ا هـ$ بحيث يقابل امتداد $د هـ$ في $و$ ونصل $و ا$ ونعده الى $ا$ أن يقابل امتداد $د ح$ في $ح$
ثم نرسم من $ح$ المستقيم $ح ط$ يوازي $ح ب$ $ب و$ ويقابل امتداد $د ب$ في $ط$

فيكون $ا ط ي ب$ هو متوازي الاضلاع المطلوب

(البرهان) من حيث ان متوازي الاضلاع $ا ب و ط$ $ا ي هـ$ متماثلان
لمتوازي الاضلاع $هـ ب و ط$ $ح ط$ المرسومين على قطر متوازي الاضلاع $د ي$

يكون متوازي الاضلاع $ا ي$ يكافئ متوازي الاضلاع $ا$
(نظرية ٨٠)

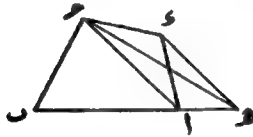
ولكن متوازي الاضلاع $ا ي$ يكافئ المثلث $م$ بالعمل
اذن متوازي الاضلاع $ا ي$ يكافئ المثلث $م$

ومن حيث ان $ا ط ي = ا هـ ح$ بالتقابل في الرأس
 $ب و ط$ $ا هـ ح = ا ب و$ بالعمل
اذن $ا ط ي = ا ب و$

ويكون متوازي الاضلاع $ا ط ي ب$ هو المطلوب رسمة لانه
يكافئ المثلث $م$ واحدى زواياه تساوى $د ل$

« عملية ٢٣ »

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلاً رباعياً معلوماً



(شكل ٢٠٤)

(الفروض) ان $ABCD$ الشكل الرباعي المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مثلث يكافئ هذا الشكل الرباعي

(العمل) فصل القطر AC ونرسم من D المستقيم DF يوازي

AC ويقابل امتداد BC في F

ثم فصل DF فيكون DFC هو المثلث المطلوب

(البرهان) من حيث ان المثلثين ABC و DFC على قاعدة

واحدة وهي CF وبين المتوازيين AC و DF

يكون المثلث ABC يكافئ المثلث DFC (نظرية ٧٧)

وبإضافة المثلث BCF الى كل من المثلثين ABC و DFC

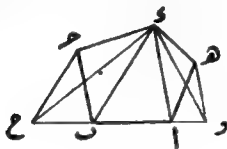
يكون الشكلان الناتجان متكافئين

ويكون $\triangle ABC$ يكافئ الشكل الرباعي $ABCD$

وهو المطلوب

« عملية ٢٤ »

المطلوب رسم مثلث يكافئ شكلاً ذا خمسة أضلاع



(شكل ٢٠٠)

(المفروض) ان $ا ب ح د ه$ هو الشكل ذو خمسة الاضلاع المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مثلث يكافئ هذا الشكل

(العمل) فصل $ا ب$ و $ا د$ ونرسم $ه و$ يوازي $ا د$ ويقطع

امتداد $ا ب$ في $و$ و $ا ح$ يوازي $د ب$ ويقطع امتداد $ا ب$ في $ح$

ثم فصل $و د$ و $و ح$ فيكون $و د ح$ هو المثلث المطلوب

(البرهان) $\triangle ا د و$ يكافئ $\triangle ه ا د$ (نظرية ٧٧)

$\triangle ا ح د$ يكافئ $\triangle ح ب د$ (نظرية ٧٧)

اذن

$\triangle ا د و + \triangle ا ح د$ يكافئ $\triangle ه ا د + \triangle ح ب د$

وبإضافة $\triangle ا ب د$ الى كل من طرفي هذا التكافؤ

يكون $\triangle و د ح$ يكافئ الخمس $ا ب ح د ه$ وهو المطلوب

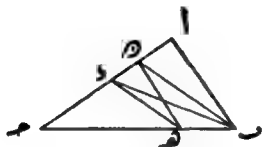
(نتيجة) يمكن تحويل أي شكل كثير الاضلاع الى آخر يكافئه

ويكون عدد رؤوسه أقل واحداً من عدد رؤوس الاول وبلاستمرار

يمكن تحويل أي شكل كثير الاضلاع الى مثلث يكافئه

« عملية ٢٥ »

المطلوب تنصيف مثلث معلوم بمستقيم يمر بنقطة مفروضة على أحد اضلاعه



(شكل ٢٠٦)

(المفروض) ان AB ح المثلث المعلوم وان D نقطة مفروضة على أحد اضلاعه AC

(المطلوب عمله) رسم مستقيم من نقطة D ينصف هذا المثلث

(العمل) ننصف AC في E ثم نصل BE ونرسم من D المستقيم

DE موازي BE ويقطع BC في F

ونصل DF فيكون هذا المستقيم هو المنصف المطلوب

(البرهان) $\triangle ABC$ D E يكافئ $\triangle DEF$ (نظرية ٧٧)

وبإضافة $\triangle BDE$ DF الى كل من هذين المثلثين

يكون $\triangle ABC$ D E يكافئ $\triangle DEF$ DF

ولكن $\triangle BDE$ DF يكافئ نصف $\triangle ABC$

اذن $\triangle DEF$ DF يكافئ نصف $\triangle ABC$

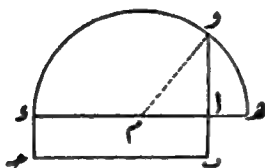
ويكون الشكل الرباعي $ABFD$ DF يكافئ النصف الآخر

من المثلث

اذن DF ينصف المثلث ويمر بنقطة D وهو المطلوب

« عملية ٢٧ »

المطلوب رسم مربع يكافئ مستطيلاً معلوماً



(شكل ٢٠٨)

(المفروض) ان AB حـ و المستطيل المعلوم

(المطلوب عمله) رسم مربع يكافئ المستطيل المعلوم

(العمل) نعد AD الى H بحيث يكون $AD = AH$ ثم نرسم

على H نصف دائرة ونعد A الى ان يقطع المحيط في O فيكون AO ضلع المربع المطلوب

(البرهان) نصف H في M ونصل MO

فيكون $AO^2 = OM^2 - AM^2$ (نظرية فيثاغورس)

$$= (12 - OM)(12 + OM) =$$

(متطابقة ٤)

ولكن $OM = HM = AM$ (انصاف اقطار)

$$اذن \quad AO^2 = (12 - OM)(12 + OM) =$$

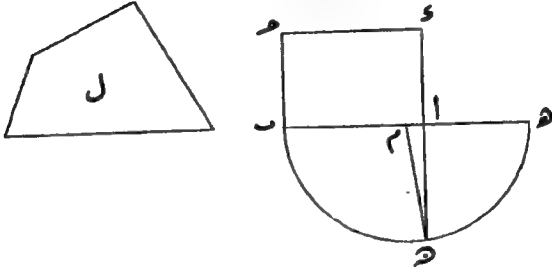
$$= 12 \times 12 =$$

وهو المطلوب

$$= 12 \times 12 =$$

« عملية ٢٨ »

المطلوب رسم مربع يكافئ كثير اضلاع معلوماً



(شكل ٢٠٩)

(المفروض ان ل كثير اضلاع معلوم)

(المطلوب عمله) رسم مربع يكافئ كثير الاضلاع المعلوم

(العمل) اولاً - نحول كثير الاضلاع الى المستطيل ا ب ح د

بالطريقة المتقدمة في عملية (٢٦)

ثانياً - نحول المستطيل ا ب ح د الى المربع الذي ضلعه ا د

بالطريقة المتقدمة في عملية (٢٧)

فيكون المربع المنشأ على ا د مكافئاً لكثير الاضلاع ل

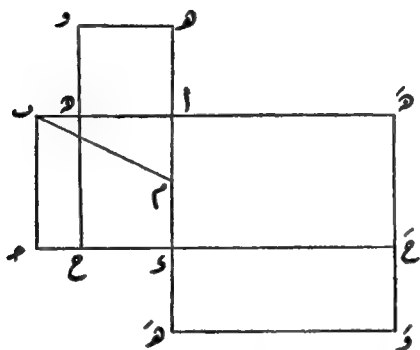
وهو المطلوب

« عملية ٢٩ »

المطلوب تقسيم مستقيم معلوم الى جزأين (من الداخل ومن

الخارج) بحيث يكون المستطيل المكوّن من المستقيم بتمامه وأحد

جزأيه مكافئاً المربع المنشأ على الجره الآخر



(شكل ٢١٠)

(المفروض) ان $ا ب$ المستقيم المعلوم
(المطلوب عمله أولاً) تقسيم هذا المستقيم من الداخل في نقطة

مثل $هـ$ بحيث يكون $ا ب \times ب هـ = ا هـ^2$

(العمل) نرسم على $ا ب$ في احدى جهتيه المربع $ا ب ح ز$ ونم
ننصف $ا ز$ في $م$ ونصل $ب م$ ثم نعد $ا م$ الى $هـ$ بحيث يكون $م هـ =$
 $م ب$ ونرسم على $ا هـ$ المربع $ا هـ و هـ$ فتكون $هـ$ هي نقطة الاقسام
من الداخل ويكون

$$ا ب \times ب هـ = ا هـ^2$$

(البرهان) نعد $و هـ$ على استقامته الى ان يقطع $ز ح$ في $ح$
فينقسم المربع $ا هـ و هـ$ الى المستطيلين $ا ح و هـ ٦ ح$
وفي $\triangle ا ب م$

$$\overline{12} - \overline{23} = \overline{13} \quad (\text{نظرية فيثاغورس})$$

$$= (\overline{12} + \overline{23})(\overline{12} - \overline{23}) \quad (\text{متطابقة ٤})$$

$$\text{ولكن } \overline{23} = ١٢٦٢٥ = ١٢٥$$

$$\text{اذن } \overline{13} = (\overline{12} + \overline{25})(\overline{12} - \overline{25})$$

$$= ٥١ \times ٥٥ =$$

$$= ٥٥ \times ٥١$$

اى ان المربع $\overline{13}$ ح $\overline{25}$ يكافئ المستطيل $\overline{51}$ ح $\overline{55}$
ولو طرحنا المستطيل $\overline{12}$ ح $\overline{25}$ من كل من الشكليين المتكافئين
 $\overline{13}$ ح $\overline{25}$ و $\overline{51}$ ح $\overline{55}$ كان الباقيان متكافئين

اى ان المستطيل $\overline{51}$ ح $\overline{55}$ يكافئ المربع $\overline{55}$ ح $\overline{51}$

$$\overline{51} = \overline{55} \times \overline{51} \quad \text{ويكون}$$

$$\overline{51} = \overline{55} \times \overline{13} \quad \text{اى ان} \quad \text{وهو المطلوب}$$

(المطلوب عمله ثانياً) قسم المستقيم $\overline{13}$ من الخارج في نقطة

$$\text{مثل } \overline{51} \text{ بحيث يكون } \overline{13} \times \overline{55} = \overline{51}^2$$

(العمل) في شكل (٢١٠) نعد $\overline{25}$ و على استقامته الى $\overline{51}$ بحيث

يكون $\overline{25} = \overline{51}$ ونرسم على $\overline{13}$ المربع $\overline{51}$ و $\overline{51}$ فتكون
 $\overline{51}$ هي نقطة الاقسام من الخارج ويكون

$$\overline{51}^2 = \overline{55} \times \overline{13}$$

(البرهان) نعد $\overline{25}$ و على استقامته الى ان يقطع و $\overline{51}$ في

ح' فينقسم المربع ا ه' و' د' الى المستطيلين ا ح' ٦ و' د'
وقد تقدم في البرهنة على الجزء الاول من هذه العملية ان
المربع ا ب ح' د' يكافئ المستطيل ه' و ح' د'
فيكون المربع ا ب ح' د' يكافئ المستطيل ه' و' ح' د'
ولو أضفنا المستطيل ا د' ح' د' الى كل من الشككين المتكافئين
ا ب ح' د' ٦ و' ه' و' ح' د' كان الناتجان متكافئين
أى ان المستطيل ب ح' د' ح' د' يكافئ المربع ا ه' و' د'

$$\text{ويكون } ب ح' د' \times ب د' = \overline{ا د'}$$

$$\text{أى ان } ا ب \times ب د' = \overline{ا د'} \quad \text{وهو المطلوب}$$

ملاحظة ١ - اذا انقسم المستقيم الى جزأين (من الداخل أو
من الخارج) وكان المستطيل المكوّن من المستقيم بتمامه وأحد جزأيه
مكافئاً للمربع المنشأ على الجزء الآخر قيل ان المستقيم منقسم قسمة
ذات وسط وطرفين

ملاحظة ٢ - لايجاد طول الوسط المناسب بدلالة المستقيم
المعلوم عند انقسامه من الداخل الى قسمة ذات وسط وطرفين

(الطريقة) في شكل (٢١٠) نعلم ان

$$\overline{ا ب} + \overline{ب د} = \overline{ا د}$$

$$\overline{ا ب} + \overline{ب د} =$$

$$\overline{ا د} =$$

$$\text{ويكون } ب = \sqrt{\overline{ا د}}$$

ولكن $٥١ = ٥١$

$$١٢ - ٥٢ =$$

$$١٢ - ٥٢ =$$

$$\frac{٥١}{٢} - ٥\sqrt{\frac{٥١}{٢}} =$$

$$(١ - ٥\sqrt{\frac{٥١}{٢}}) =$$

ملاحظة ٣ - لايجاد طول الوسط المتناسب بدلالة المستقيم

المعلوم عند انقسامه من الخارج الى قسمة ذات وسط وطرفين

(الطريقة) في شكل (٢١٠) نعلم ان

$$١٢ + ٢'٥ = ٥١$$

$$١٢ + ٥٢ =$$

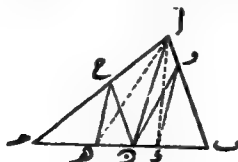
$$\frac{٥١}{٢} + ٥\sqrt{\frac{٥١}{٢}} =$$

$$(١ + ٥\sqrt{\frac{٥١}{٢}}) =$$

(تمارين ٣٢)

(١) المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى ثلاثة أجزاء متكافئة

بمستقيمين يمران بنقطة مفروضة على أحد أضلاعه



(شكل ٢١١)

(المفروض) ان $ا ب ح$ المثلث المعلوم $و$ النقطة المفروضة على أحد الاضلاع وليكن $ب ح$ (المطلوب عمله) رسم مستقيمين يمران بنقطة $و$ ويقسمان المثلث الى ثلاثة اجزاء متكافئة (العمل) نقسم $ب ح$ الى ثلاثة اقسام متساوية بالنقطتين $و$ ثم نصل $ا و$ ونرسم $د و$ $ه ح$ يوازيان $ا و$ ونصل $و$ $و$ $و$ $ح$ فيكونان هما المستقيمين اللذين يقسمان المثلث $ا ب ح$ الى ثلاثة اجزاء متكافئة

(البرهان) نصل $ا و$ $ا و$ $ا و$ ثم نقول من حيث ان $ب د = د و = و ح$ $= \frac{1}{3} ب ح$ يكون كل من المثلثات $ا ب د$ $د و ح$ $ا و ه$ $ا و ه$ $ا و ه$ $ا و ه$ يكافئ $\frac{1}{3} \Delta ا ب ح$

ولكن $\Delta د و و$ يكافئ $\Delta ا و و$ (نظرية ٧٧) وبإضافة $\Delta ب و و$ الى كل من المثلثين المتكافئين يكون $\Delta د و ب$ و يكافئ $\Delta ا و ب$ اي ان $\Delta د و ب$ و يكافئ $\frac{1}{3} \Delta ا ب ح$

وكذلك نبرهن على ان $\Delta و ح ح$ يكافئ $\frac{1}{3} \Delta ا ب ح$ فيكون الشكل الرباعي $و ا ح$ يكافئ الثلث الباقي من المثلث $ا ب ح$ وبذلك يقسم المستقيمان $و$ $و$ $و$ $ح$ المثلث $ا ب ح$ الى ثلاثة اجزاء متكافئة وهو المطلوب

(٢) $ا ب ح$ مثلث $و$ نقطة مفروضة على قاعدته $ب ح$ أو على امتدادها والمطلوب رسم مثلث يكافئ المثلث $ا ب ح$ على شرط ان تكون $ب و$ قاعدة له

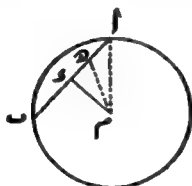
- (٣) المطلوب تقسيم مثلث معلوم الى أربعة اجزاء متكافئة بثلاثة مستقيمت تمر بنقطة مفروضة على احد اضلاعه
- (٤) المطلوب مثلث ونقطة مفروضة على احد اضلاعه والمطلوب رسم مستقيم من هذه النقطة يقطع من المثلث جزءاً يكافئ خمسة أو سدسه أو اى كسر آخر منه
- (٥) المطلوب شكل رباعى والمطلوب إيجاد نصفه أو ثلثه أو ربعه أو خمسة أو اى كسر آخر منه برسم مستقيم من أحد رؤوسه
- (٦) اذا قسم مستقيم من الداخل قسمة ذات وسط وطرفين واخذ على اكبر جزأيه بعد مساو لاصغرهما انقسم الجزء الاكبر بذلك قسمة ذات وسط وطرفين
-

الباب الخامس

في المستطيل من حيث علاقته بالدائرة

« نظرية ٨٨ »

إذا رسم وتر في دائرة وفرضت نقطة عليه كان المستطيل المكون من جزأى الوتر مكافئاً المربع المنشأ على نصف القطر مطروحاً منه المربع المنشأ على المستقيم الذى يصل المركز بنقطة التقسيم



(شكل ٢١٢)

(المفروض) ان AB وتر في الدائرة التي مركزها M وان C نقطة ما فرضت عليه

(المطلوب اثباته) ان $AC \times CB = MC^2 - \frac{AB^2}{4}$

(البرهان) نرسم من M عموداً على الوتر AB مثل MC

فيكون $AC = CB$ (نظرية ٥٠)

وفي $\triangle AMC$ القائم الزاوية في C

(نظرية فيثاغورس) $AM^2 = AC^2 + MC^2$

وكذلك في $\triangle م و د$ القائم الزاوية في $و$

$$\overline{م و}^2 + \overline{و د}^2 = \overline{م د}^2$$

وبالطرح يكون

$$\overline{م و}^2 - \overline{و د}^2 - \overline{ا د}^2 + \overline{و د}^2 = \overline{م د}^2 - \overline{ا د}^2$$

$$\overline{م و}^2 - \overline{ا د}^2 =$$

$$(\overline{م و} - \overline{ا د})(\overline{م و} + \overline{ا د}) =$$

(متطابقة ٤)

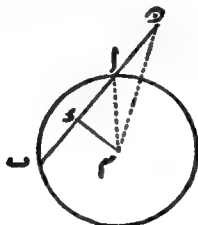
$$(\overline{م و} - \overline{ا د})(\overline{م و} + \overline{ا د}) =$$

$$١٥ \times ٥ =$$

اي ان $\overline{م و}^2 - \overline{ا د}^2 = ٥ \times ١٥$ وهو المطلوب

د نظرية ٨٩

اذا رسم وتر في دائرة وفرضت قطعة على امتداده كان المستطيل المكوّن من جزأى الوتر مكافئاً المربع المنشأ على المستقيم الذى يصل المركز ونقطة التقسيم مطروحاً منه المربع المنشأ على نصف القطر



(شكل ٢١٣)

(المفروض) ان AB وتر في الدائرة التي مركزها M وان D نقطة ما فرضت على امتداده

(المطلوب اثباته) ان $AD \times AB = 2MD^2$ \square $MD^2 - MD^2$
 (البرهان) نرسم من M عموداً على الوتر AB مثل E فيقسم AB الى قسمين متساويين ثم نقول

في $\triangle ADE$ القائم الزاوية في E

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورس})$$

وفي $\triangle BDE$ القائم الزاوية في E

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 \quad (\text{نظرية فيثاغورس})$$

وبالطرح يكون

$$AD^2 - BD^2 = AE^2 - BE^2 = 2AE^2 - 2BE^2 = 2AE^2 - 2BE^2$$

$$AD^2 - BD^2 = 2AE^2 - 2BE^2$$

$$(AD - BD)(AD + BD) = 2(AE - BE)(AE + BE)$$

(متطابقة ٤)

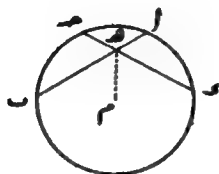
$$(AD - BD)(AD + BD) = 2(AE - BE)(AE + BE)$$

$$AD \times BD = 2MD^2$$

اي ان $AD \times BD = 2MD^2$ وهو المطلوب

« نظرية ٩٠ »

اذا تقاطع وتران داخل الدائرة كان المستطيل المكون من جزأى أحدهما مكافئاً المستطيل المكون من جزأى الآخر



(شكل ٢١٤)

(المفروض) ان $ا ب$ و $ح د$ وتران تقاطعا داخل الدائرة في $هـ$

(المطلوب اثباته) ان $ا هـ \times هـ ب = ح هـ \times هـ د$

(البرهان) نصل $م هـ$ ثم نقول

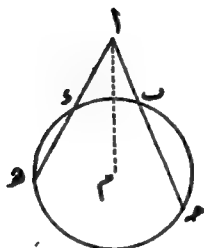
$$(نظرية ٨٨) \quad \overline{م هـ}^2 - \overline{م ب}^2 = ا هـ \times هـ ب$$

$$(نظرية ٨٨) \quad \overline{م هـ}^2 - \overline{م د}^2 = ح هـ \times هـ د$$

$$\text{اذن} \quad ا هـ \times هـ ب = ح هـ \times هـ د \quad \text{وهو المطلوب}$$

« نظرية ٩١ »

اذا مد من نقطة خارج دائرة قاطعان لها كان المستطيل المكون من أحد القاطعين وجزئه الخارج مكافئاً المستطيل المكون من القاطع الثاني وجزئه الخارج



(شكل ٢١٥)

(المفروض) ان ا نقطة ما خارج الدائرة وان ا ب ح ا د هـ
قاطعان لها

(المطلوب اثباته) ان $ا ب \times ا ح = ا د \times ا هـ$

(البرهان) نصل ا م ثم نقول

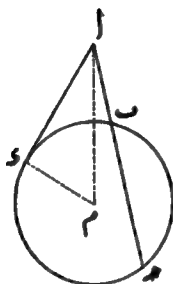
$$ا ب \times ا ح = ا م^2 - م ح^2 \quad \text{(نظرية ٨٩)}$$

$$ا د \times ا هـ = ا م^2 - م د^2 \quad \text{(نظرية ٨٩)}$$

اذن $ا ب \times ا ح = ا د \times ا هـ$ وهو المطلوب

« نظرية ٩٢ »

اذا فرضت نقطة خارج الدائرة ورسم منها مماس وقاطع لها كان
المستطيل المكون من القاطع بنهايه وجزئه الخارج مكافئاً المربع المنشأ
على المماس



(شکل ۲۱۶)

(المفروض) ان A نقطة ما خارج الدائرة وان AB ح قاطع
لهذه الدائرة وان A و M مماس لها

٢- (المطلوب اثباته) ان $a \times b = b \times a$

(البرهان) فصل ۱۲ و ۱۳ ثم نقول

(نظريه ۸۹)

ولكن من حيث ان ١ و ٢ مماس للدائرة

تكون $\Delta ١ و ٢ =$ قائمة (نظرية ٦٠)

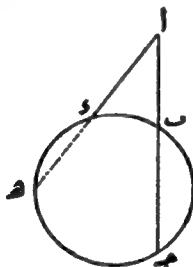
ويكون $52 - 12 = 51$

اذن $1 \times 1 = 1$ وهو المطلوب

« نظرية ٩٣ »

(وهي عكس نظرية ٩٢)

إذا مد من نقطة خارج دائرة مستقيمان أحدهما يقطعها والآخر يلاقيها وكان المستطيل المكون من القاطع بتمامه وجزئه الخارج مكافئاً المربع المنشأ على المستقيم الذى يلاقى الدائرة كان هذا المستقيم مماساً لها في نقطة تلاقيه



(شكل ٢١٧)

(المفروض) ان نقطة ما خارج الدائرة وان AB ح قاطع لهذه الدائرة و AC مستقيم يلاقى الدائرة في نقطة C بحيث ان

$$AC^2 = AB \times AD$$

(المطلوب اثباته) ان AC ممس الدائرة في C

(البرهان) ان لم يكن AC مماساً للدائرة في C فبامتداده يقطع

الدائرة في نقطة اخرى مثل D

ويكون $AC \times AD = AB \times AE$ (نظرية ٩١)

ولكن $\frac{2}{\text{ا}} = \text{ب} \times \text{ح} \text{ا}$ بالفرض

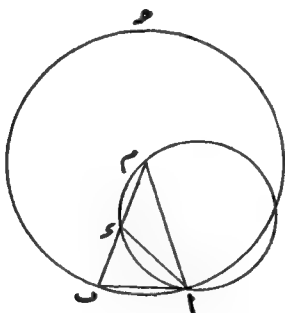
اذن $\frac{2}{\text{د}} = \text{ا} \times \text{ه} \text{ا}$

اي ان $\text{ا} = \text{ه} \text{ا}$

وهذا لا يتأتى الا اذا وقعت نقطة ه على اى ان اى لا يمكن ان يلاقى الدائرة فى نقطة اخرى غير اى
وعلى ذلك يكون اى مماسا للدائرة فى اى وهو المطلوب

« عملية ٣٠ »

المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين كل من زاويتي قاعدته
تساوى ضعف زاوية رأسه



(شكل ٢١٨)

(العمل) نرسم مستقيما ما مثل م ب ونقسمه من الداخل فى اى

بحيث يكون $\text{م ب} \times \text{ب ا} = \frac{2}{\text{ا}}$

ثم نركز في α ونصنف قطر يساوي $\alpha\beta$ نرسم الدائرة $\alpha\beta\gamma$ ونرسم فيها الوتر $\alpha\gamma = \alpha\delta$ ونصل $\alpha\epsilon$ فيكون $\alpha\beta\epsilon$ المثلث المطلوب

(البرهان) نصل $\alpha\delta$ ونرسم دائرة تمر بـ $\alpha\delta$ والمثلث $\alpha\delta\epsilon$

فن حيث ان $\alpha\beta \times \alpha\delta = \alpha\delta^2$ بالعمل

$$\alpha\beta \times \alpha\delta = \alpha\delta^2$$

ويكون β مماساً للدائرة $\alpha\delta\epsilon$ في α (نظرية ٩٣)

وتكون $\alpha\beta \perp \alpha\delta$ (نظرية ٧٣)

$$\alpha\beta \perp \alpha\delta + \alpha\delta \perp \alpha\epsilon = \alpha\beta \perp \alpha\epsilon$$

(نظرية ٣٦)

$$\alpha\beta \perp \alpha\delta + \alpha\delta \perp \alpha\epsilon =$$

$$\alpha\beta \perp \alpha\epsilon$$

6 (نظرية ٦) $\alpha\beta \perp \alpha\delta = \alpha\beta \perp \alpha\epsilon$

اذن $\alpha\beta \perp \alpha\delta = \alpha\beta \perp \alpha\epsilon$

ويكون $\alpha\delta = \alpha\epsilon$ (نظرية ٧)

وتكون $\alpha\beta \perp \alpha\delta = \alpha\beta \perp \alpha\epsilon$ (نظرية ٦)

$$\alpha\beta \perp \alpha\delta =$$

اي ان $\alpha\beta \perp \alpha\delta = \alpha\beta \perp \alpha\epsilon$

$$\alpha\beta \perp \alpha\delta =$$

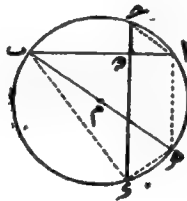
وبذلك تكون كل من زاويتي القاعدة $\alpha\beta\epsilon$ $\alpha\delta\epsilon$ في المثلث

$\alpha\beta\epsilon$ ضعف زاوية رأسه $\alpha\delta\epsilon$ وهو المطلوب

(ملاحظة) من حيث ان مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين
ففى $\triangle ا ب ج$ تكون $\angle ا ب ج = ٣٦^\circ$ وكل من زاويتي القاعدة
 $\angle ا ب ج = ٢١٦^\circ$ $\angle ج ب ا = ٢١٦^\circ$

تمارين (٣٣)

(١) ا ب ج د هـ وتران متقاطعان فى دائرة واحدهما
عمودى على الآخر والمطلوب البرهنة على ان مجموع المربعات المنشأة
على د ا د ب د ج د هـ د هـ يكافئ المربع المنشأ على قطر
الدائرة



(شكل ٢١٩)

(المفروض) ان ا ب ج د هـ عمود على ح د هـ
(المطلوب اثباته) ان

$$د ا^2 + د ب^2 + د ج^2 + د هـ^2 = \text{المربع المنشأ على القطر}$$

(البرهان) نرسم ا هـ يوازى ح د ثم نصل ب هـ ج ب و

ج د ا هـ د

فن حيث ان ح د عمودى على ا ب ١٦ ه يوازى ح د

تكون د ب ا ه قائمة (نظرية ٢٨)

ويكون ب ه قطعاً للدائرة (نظرية ٢٩)

وتكون د ب د ه قائمة (» »)

فى $\triangle ب د ه$ القائم الزاوية فى ه

$$\overline{ب د}^2 = \overline{ب ه}^2 + \overline{د ه}^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورس)}$$

وفى $\triangle ا د ه$ القائم الزاوية فى ه

$$\overline{ا د}^2 = \overline{ا ه}^2 + \overline{د ه}^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورس)}$$

وبجمع هاتين المتساويتين

$$\overline{ا د}^2 + \overline{ب د}^2 = \overline{ا ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{ب د}^2$$

ومن حيث ان الوترين المتساويين يحصران بينهما قوسين

متساويين

$$\overline{ا د}^2 = \overline{ا ه}^2 \quad \text{(نظرية ٥٣)}$$

$$\overline{ا د} = \overline{ا ه} \quad ٦$$

وبالتعويض يكون

$$\overline{ا د}^2 + \overline{ب د}^2 = \overline{ا ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{ب د}^2$$

ولكن فى $\triangle ب د ه$ القائم الزاوية فى ه

$$\overline{ب د}^2 = \overline{ب ه}^2 + \overline{د ه}^2 \quad \text{(نظرية فيثاغورس)}$$

$$\overline{ا د}^2 = \overline{ا ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{د ه}^2 + \overline{ب د}^2$$

وهو المطلوب

(٢) اذا رسمنا نصف دائرة على مستقيم معلوم مثل AB وأقننا من احدى نقطته C عمودا عليه مثل CD ل نقابل المحيط في L فاستنتج من نظرية (٩٠) أن

$$\overline{CL} = \sqrt{CD \times CB}$$

(٣) اذا تقاطعت دائرتان وفرضت نقطة ما مثل C على الوتر المشترك بينهما ومر بها وتران احدهما AB في احدى الدائرتين والآخر CD في الدائرة الثانية فبرهن على ان

$$AC \times CB = CD \times DB$$

(٤) اذا تقاطعت دائرتان وفرضت نقطة ما على امتداد الوتر المشترك كانت المماسات الممدودة من هذه النقطة الى الدائرتين متساوية
(٥) اذا كان AB مماسا مشتركا لدائرتين متقاطعتين في S CS كان امتداد CS منصفا له

(٦) AB CD مثلث ازل من A العمود AE على BC ومن B العمود BF على AC فتقاطع العمودان في M برهن على ان

$$AM \times MB = CM \times MC$$

(٧) اذا كانت M مركز دائرة معلومة وكانت C نقطة ما خارجة عن الدائرة فاذا مد منها المماسان CA CB الى المحيط ثم وصل CM فقطع الوتر AB في L فبرهن على ان

$$\overline{CL} = \sqrt{CM \times CA}$$

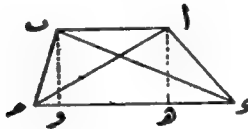
(٨) في التمرين السابق اذا فرض ان نصف قطر الدائرة هو r فبرهن على ان

$$r^2 = CL \times CM$$

تمارين عامة

(١) ا ب ح د شبه منحرف قاعدته المتوازيان ا ب و ح د
فاذا كانت كل من زاويتي ح د و ح د حادة فبرهن على ان

$$\overline{ا ح}^2 + \overline{ب د}^2 = \overline{ا د}^2 + \overline{ب ح}^2 + ٢ \times \overline{ا ب} \times \overline{ح د}$$



(شكل ٢٢٠)

(البرهان) نرسم الارتفاعين ا ه و ب و ثم نقول
في $\triangle ا ح د$ الحاد الزاوية في د

$$\overline{ا ح}^2 = \overline{ا د}^2 + \overline{ح د}^2 - ٢ \times \overline{ا د} \times \overline{ح د} \cos \angle د$$

(نظرية ٨٤)

وفي $\triangle ب ح د$ الحاد الزاوية في د

$$\overline{ب د}^2 = \overline{ب ح}^2 + \overline{ح د}^2 - ٢ \times \overline{ب ح} \times \overline{ح د} \cos \angle د$$

(نظرية ٨٤)

وبجمع هاتين المتساويتين يكون

$$\overline{ا ح}^2 + \overline{ب د}^2 =$$

$$\overline{ا د}^2 + \overline{ح د}^2 - ٢ \times \overline{ا د} \times \overline{ح د} \cos \angle د +$$

$$\overline{ب ح}^2 + \overline{ح د}^2 - ٢ \times \overline{ب ح} \times \overline{ح د} \cos \angle د$$

$$\begin{aligned}
 & ١ = ا + ب + ح + د + هـ + و + ز + حـ + دـ + هـ + و + ز = ٢ - حـ + ٢ - دـ + ٢ - هـ + ٢ - و + ٢ - ز + حـ + دـ + هـ + و + ز \\
 & ١ = ا + ب + ح + د + هـ + و + ز + (حـ - د - هـ - و - ز) \\
 & ١ = ا + ب + ح + د + هـ + و + ز + حـ + د + هـ + و + ز \\
 & ١ = ا + ب + ح + د + هـ + و + ز + حـ + د + هـ + و + ز
 \end{aligned}$$

وهو المطلوب

(٢) اذا فرض متوازي اضلاع ورسم اى مستقيم يمر بنقطة تقاطع قطريه فبرهن على أن هذا المستقيم يقسمه الى جزأين متكافئتين
(٣) المطلوب تقسيم متوازي اضلاع الى ثلاثة متوازيات اضلاع متكافئة

(٤) المطلوب تقسيم متوازي اضلاع الى جزأين متكافئتين بمستقيم يكون عمودا على أحد اضلاعه
(٥) المطلوب رسم مثلث متساوى الساقين على قاعدة مثلث معلوم بحيث يكافئه

(٦) ا ب ح مثلث رسم فيه المستقيم المتوسط ب و ومد على استقامته الى هـ بحيث كان و هـ = ب و المطلوب البرهنة على أن $\triangle هـ ب ح$ يكافئ $\triangle ا ب ح$

(٧) ا ب ح و شبه منحرف نُصف ضلعا المتوازيان ا ب و حـ في س و ص والمطلوب البرهنة على ان س ص يقسم شبه المنحرف الى جزأين متكافئتين

(٨) في التمرين السابق اذا فرض ان نقطة م منتصف س ص فبرهن على ان اى مستقيم يمر بها ويقطع ا ب و حـ (لا امتدادهما)

يقسم شبه المنحرف الى جزأين متكافئتين

(٩) اذا وصل بين منتصفات اضلاع الشكل الرباعي على الترتيب بمستقيمات كان متوازي الاضلاع الحادث مكافئاً لنصف الشكل الرباعي المعلوم

(١٠) ا ب ح مثلث نُصف ضلعه ا ب في و وضلعه ا ح في ه فاذا تقاطع ب ه ح و في ل فبرهن على أن المثلث ب ل ح يكافئ الشكل الرباعي ا ء ل ه

(١١) ا س ب ا ص ب مثلثان قائما الزاوية مرسومان على وترهما المشترك ا ب وفي جهة واحدة منه فاذا رسم ا ب ه عمودين على امتداد س ص فبرهن على أن

$$\overline{س ٢} + \overline{س ٥} = \overline{ص ٢} + \overline{ص ٥}$$

(١٢) ا ب ح مثلث قائم الزاوية قسم وتره ا ب الى ثلاثة اقسام متساوية في س ه ص والمطلوب البرهنة على ان

$$\overline{ح س} + \overline{ح ص} + \overline{ص س} = \overline{ا ٢} + \overline{ا ٢} + \overline{ا ٢}$$

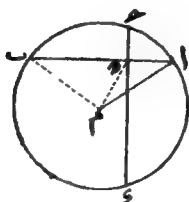
(١٣) دائرة مركزها م رسم فيها القطر ا ب وفرضت عليه النقطتان س ه ص فاذا فرضت نقطة ما على المحيط مثل ه وكان م س = م ص فبرهن على ان

$$\overline{ه م} + \overline{ه ص} = \overline{ا ١} + \overline{ا ١} = \overline{ص ١} + \overline{ص ١} + \overline{ب ١} + \overline{ب ١}$$

(١٤) اذا قسم مستقيم الى قسمة ذات وسط وطرفين فبرهن على ان مجموع المربعين المنشأين على المستقيم بتمامه وجزئه الاصغر يكافئ ثلاثة أمثال المربع المنشأ على جزئه الاكبر

(١٥) دائرة مركزها م رسم فيها الوتران المتتامان ا ب و ج د و المطلوب البرهنة على ان

$$\overline{ا ب} + \overline{ج د} = \overline{٢١٨} - \overline{٢٢٤}$$



(شكل ٢٢١)

$$\overline{ا ب} + \overline{ج د} + \overline{٢١٢} + \overline{٢١٢} = \overline{٢١٨} \quad (\text{البرهان})$$

(متطابقة ٢)

$$\overline{ج د} + \overline{ج د} + \overline{٢٢٢} + \overline{٢٢٢} = \overline{٢٢٤} \quad ٦$$

(متطابقة ٢)

وبالجمع يكون

$$\overline{ا ب} + \overline{ج د} + \overline{٢١٢} + \overline{٢١٢} + \overline{٢٢٢} + \overline{٢٢٢} = \overline{٢١٨} + \overline{٢٢٤}$$

وسبق ان برهنا في المسألة الاولى من تمارين (٣٣) على ان

$$\overline{ا ب} + \overline{ج د} + \overline{٢١٢} + \overline{٢١٢} = \overline{٢١٨}$$

$\overline{٢٢٤} =$

$$\text{اذن } \overline{اب} + \overline{ح د} = \overline{٢١٤} + \overline{٢١٢} = \overline{٤٢٦} \\ \overline{٤٢٦} + \overline{٤٢٦} = \overline{٨٥٢}$$

$$\text{ولكن } \overline{اب} \times \overline{ح د} = \overline{٢١} \times \overline{٤٢} = \overline{٨٨٢} \\ \text{(نظرية ٨٨)}$$

$$\overline{٨٨٢} - \overline{٨٨٢} = \overline{٤٢} \times \overline{٤٢} = \overline{١٧٦٤} \\ \text{(نظرية ٨٨)}$$

وبالتعويض يكون

$$\overline{٨٢٢} - \overline{٢١٢} + \overline{٢١٤} = \overline{٨٢٢} + \overline{٢١٤} \\ \overline{٨٢٢} - \overline{٢١٢} +$$

$$\overline{٨٢٤} - \overline{٢١٨} =$$

وهو المطلوب

(١٦) اذا تقاطعت دائرتان في ا ب وكان ح د ه و المماسين المشتركين للدائرتين من الخارج ومد الوتر المشترك على استقامته حتى قابل المماسين في س ه ص فبرهن على ان

$$\overline{س ه} = \overline{س ص} + \overline{ح د}$$

(١٧) دائرة رسم فيها القطر ا ب موازياً للوتر ح د فاذا فرضت نقطة ما على ا ب مثل ه فبرهن على ان

$$\overline{ه د} + \overline{ه ا} = \overline{ح د} + \overline{ح ب}$$

(١٨) المطلوب إيجاد المحل الهندسي لنقطة تقاطع المستقيمتين المتوسطة للمثلثات المتكافئة المرسومة على قاعدة معلومة

(١٩) اذا قسم مستقيم قسمة ذات اوسط وطرفين كان المستطيل

المكون من مجموع الجزأين وقاضلهما مكافئ المستطيل المكون من الجزأين
 (٢٠) اذا مد من نقطة مثل \odot خارج دائرة قاطع لها مثل
 \odot ح د وكان \odot عمودا على قطر في الدائرة مثل ا ب فبرهن على ان

$$\odot \odot = \odot \odot \times \odot \odot - \odot \odot \times \odot \odot$$

« تمّ الجزء الثاني ويليه الجزء الثالث »
 (مقرر السنتين الثالثة والرابعة من التعليم الثانوى)



مذكرات

[illegible]

آخری درج شدہ تاریخ پریہ کتاب مستعار
لی گئی تھی مقررہ مدت سے زیادہ رکھنے کی
صورت میں ایک آنہ یومیہ دیرا نہ لیا جائے گا۔
